ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

11. cvičenie

- **Zadanie:**

  Nech A je množina. Nájdite bijekciu z množiny podmnožín množiny A do množiny funkcií z množiny A do množiny $\{0, 1\}$.

  Riešenie:

  Nech Φ je zobrazenie z $\mathrm{P}(A)$ do $\mathrm{Fun}(A, \{0, 1\})$ definované takto: Ak $X \in \mathrm{P}(A)$, t. j. $X \subseteq A$, tak $\Phi(X)$ je funkcia z A do $\{0, 1\}$ taká, že

  $$(\Phi(X))(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in X, \\ 0, & \text{ak } x \in A \setminus X. \end{cases}$$

  Ukážeme, že takto definovaná funkcia je bijekcia z $\mathrm{P}(A)$ do ${}^{A}\{0, 1\}$:

  - Φ je injektívna:

    $X_1 \neq X_2$,
    (predpoklad s cieľom $\Phi(X_1) \neq \Phi(X_2)$),
    neplatí $X_1 \subseteq X_2$ alebo neplatí $X_2 \subseteq X_1$,
    (rovnosť je konjunkciou týchto dvoch inklúzií),
    existuje x z A, že $x \in X_1 \setminus X_2$, alebo existuje x z A, že $x \in X_2 \setminus X_1$
    (podľa definície inklúzie),
    existuje x z A, že $x \in X_1$ a $x \notin X_2$, alebo existuje x z A, že $x \in X_2$ a $x \notin X_1$
    (definícia rozdielu),
    existuje x z A, že $x \in X_1$ a $x \in A \setminus X_2$, alebo existuje x z A, že $x \in X_2$ a $x \in A \setminus X_1$
    (prepis),
    existuje x z A, že $(\Phi(X_1))(x) = 1$ a $(\Phi(X_2))(x) = 0$,
    alebo existuje x z A, že $(\Phi(X_1))(x) = 0$ a $(\Phi(X_2))(x) = 1$,
    (podľa definície Φ),
    existuje x z A, že $(\Phi(X_1))(x) \neq (\Phi(X_2))(x)$
    (lebo ako $\Phi(X_1)$, tak $\Phi(X_2)$ môžu mať len dve hodnoty),
    $\Phi(X_1) \neq \Phi(X_2)$
    (prepis).

  - Φ je surjektívna na $\mathrm{Fun}(A, \{0, 1\})$:

    Nech f je funkcia z A do $\{0, 1\}$, nájdeme X z $\mathrm{P}(A)$ také, že $\Phi(X) = f$. Nech

    $$X = \{x \in A : f(x) = 1\}.$$

    Potom $X \subseteq A$, t. j. $X \in \mathrm{P}(A)$ a platí:

    - Ak $f(x) = 1$, tak $x \in X$, a teda $(\Phi(X))(x) = 1$.
    - Ak $f(x) = 0$, tak $x \notin X$, čiže $x \in A \setminus X$, a teda $(\Phi(X))(x) = 0$.

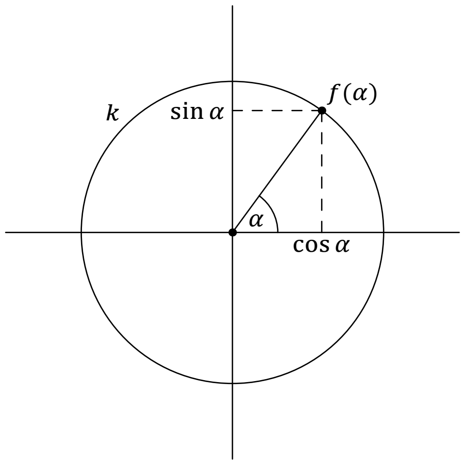
    Pre každé x z A teda platí $f(x) = (\Phi(X))(x)$, takže $f = \Phi(X)$.

- **Zadanie:**

  Zistite mohutnosť jednotkovej kružnice.

  Riešenie:

  Jednotková kružnica k je množina $\{\langle \cos\alpha, \sin\alpha \rangle : \alpha \in [0, 2\pi)\}$. Definujme funkciu f z $[0, 2\pi)$ do k takto:



$$f(\alpha) = \langle \cos\alpha, \sin\alpha \rangle.$$

- f je surjekcia na k:
  Platí

  $$k = \{\langle \cos\alpha, \sin\alpha \rangle : \alpha \in [0, 2\pi)\} = \{f(\alpha) : \alpha \in [0, 2\pi)\} = f[[0, 2\pi)] = f[\mathrm{Dom}(f)] = \mathrm{Rng}(f),$$

  čo sme chceli dokázať.
- f je injekcia:
  $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$,
  akk $\langle \cos\alpha_1, \sin\alpha_1 \rangle = \langle \cos\alpha_2, \sin\alpha_2 \rangle$
  (podľa definície f),
  akk $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ a $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$
  (vlastnosť usporiadanej dvojice),
  akk $\alpha_1 \in \{\alpha_2, 2\pi - \alpha_2\}$ a $\alpha_1 \in \{\alpha_2, \pi - \alpha_2, 3\pi - \alpha_2\}$
  (z vlastností funkcií cos a sin, lebo $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi)$),
  akk $\alpha_1 \in (\{\alpha_2, 2\pi - \alpha_2\} \cap \{\alpha_2, \pi - \alpha_2, 3\pi - \alpha_2\})$
  (z definície prieniku), akk $\alpha_1 \in \{\alpha_2\}$,
  akk $\alpha_1 = \alpha_2$.

To teda znamená, že $\mathrm{card}(k) = \mathrm{card}([0, 2\pi)) = \mathfrak{c}$.

- **Zadanie:**
  Zistite mohutnosť množiny všetkých postupností 0 a 1 obsahujúcich iba konečne veľa 1.
  Riešenie:
  Označme túto množinu M, ukážeme, že je spočítateľná:
  Nech f je funkcia z $\mathbb{N}$ do M definované tak, že otočíme dvojkový zápis vstupu a doplníme ho nulami, t. j.

  $$f((x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)_2) = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1} x_n, 0, 0, 0, \dots).$$

  Ukážeme, že f je bijekcia:

  - f je injekcia:
    Rôzne prirodzené čísla majú rôzne dvojkové zápisy, a teda im v zobrazení f prislúchajú rôzne postupnosti.
  - f je surjekcia na M:
    Nech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je z M.
    - Nech pre každé n platí $x_n = 0$.
      Potom $f(0) = (0, 0, 0, \dots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
    - Nech p je najmenšie také, že platí $x_p = 1$,
      Potom $f((x_p x_{p-1} \dots x_1 x_0)_2) = (x_0, x_1, \dots, x_p, 0, 0, 0, \dots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Domáce úlohy

1 Nech f a g sú funkcie z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ také, že $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$. Nech

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big((f \circ g)^{(n)}[\mathbb{N} \setminus \operatorname{rng}(g)]\big).$$

Nech h je funkcia z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ daná vzťahom

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in S, \\ g^{-1}(x), & \text{ak } x \notin S. \end{cases}$$

(Čiže f, g, h sú funkcie z ilustrácie dôkazu Cantorovej-Bernsteinovej vety z prednášky.)

Zistite všetky hodnoty funkcie h v bodoch 0, 1, …, 20.

2 Zvoľte si náhodne prvých desať riadkov tabuľky reálnych čísel z $(0, 1)$ a dve prepisovacie cifry a zistite prvých desať cifier čísla, ktoré z nich vytvorí procedúra Cantorovej diagonály.

3 Zistite mohutnosť množiny $[0, 1)^3$.

4 Dokážte, že mohutnosť n je menšia ako mohutnosť $n + 1$.

5 Zistite mohutnosť množiny všetkých konečných podmnožín množiny $\mathbb{N}$.