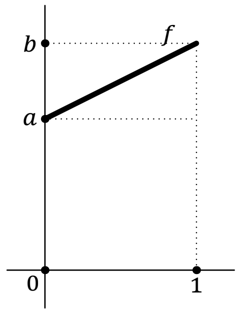
ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

10. cvičenie

- **Zadanie:**
  Nájdite bijekciu z množiny $[0,1]$ do množiny $[a,b]$, kde a a b sú reálne čísla také, že $a < b$.
  Riešenie:
  Asi najjednoduchším riešením bude lineárna funkcia f taká, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.



Funkcia f má byť lineárna, teda platí $f(x) = qx + k$, kde q a k sú reálne čísla. Navyše chceme $f(0) = a$ a $f(1) = b$, takže $k = q \cdot 0 + k = f(0) = a$ a $q + k = q \cdot 1 + k = f(1) = b$, z čoho $q = b - k = b - a$. Dostávame teda

$$f(x) = (b - a)x + a,$$

kde $x \in [0,1]$.

Ukážeme, že takto definovaná funkcia je bijekcia z $[0,1]$ do $[a,b]$:

- f je injektívna:
  $f(x_1) = f(x_2)$,
  (predpoklad s cieľom $x_1 = x_2$),
  akk $(b-a)x_1 + a = (b-a)x_2 + a$,
  (podľa definície f),
  akk $(b-a)x_1 = (b-a)x_2$,
  (odpočítanie a),
  akk $x_1 = x_2$,
  (vydelenie kladným číslom $b - a$).
- f je surjektívna na $[a,b]$:
  Nech $y \in [a,b]$, nájdeme x z $[0,1]$ také, že $f(x) = y$. Má teda platiť $(b-a)x + a = y$, t. j. $(b-a)x = y - a$, a teda $x = \frac{y-a}{b-a}$. Platí pritom $0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq \frac{b-a}{b-a} = 1$, takže naozaj platí $x \in [0,1]$. Hodnota $f(x)$ je teda definovaná a platí $f(x) = f(\frac{y-a}{b-a}) = (b-a) \cdot \frac{y-a}{b-a} + a = (y-a) + a = y$.

- **Zadanie:**
  Nájdite bijekciu z množiny $[a,b]$ do množiny $[c,d]$, kde a, b, c a d sú reálne čísla také, že $a < b$ a $c < d$.
  Riešenie:
  Podľa predchádzajúcej úlohy vieme nájsť ako bijekciu f z $[0,1]$ do $[a,b]$, tak bijekciu g z $[0,1]$ do $[c,d]$. Potom f^{-1} je bijekcia z $[a,b]$ do $[0,1]$ takže $f^{-1} \circ g$ je hľadaná bijekcia z $[a,b]$ do $[c,d]$.

- **Zadanie:**
  Dokážte, že funkcia f z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ definovaná vzťahom

$$f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$$

  je párujúca funkcia.
  Riešenie:
  Dokážeme obe podmienky:

- f je injektívna:
  Nech $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, t. j.$2^{x_1}(2y_1 + 1) - 1 = 2^{x_2}(2y_2 + 1) - 1$, z čoho dostávame $2^{x_1}(2y_1 + 1) = 2^{x_2}(2y_2 + 1)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x_1 \leq x_2$. Po vydelení rovnice kladným číslom 2^{x_1} potom dostávame $2y_1 + 1 = 2^{x_2 - x_1}(2y_2 + 1)$. Číslo na ľavej strane je nepárne, číslo na pravej strane je však nepárne iba vtedy, keď je exponent $x_2 - x_1$ pri 2 nulový. To teda znamená, že $x_1 = x_2$ a $2y_1 + 1 = 2y_2 + 1$, z čoho $y_1 = y_2$. Platí teda požadované $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$.
- f je surjektívna na $\mathbb{N}$:
  Nech $n \in \mathbb{N}$. Číslo $n+1$ je potom kladné, takže ho (podľa základnej vety aritmetiky) možno (jednoznačne) napísať v tvare súčinu mocnín prvočísel. Nech teda $n + 1 = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdots$, kde čísla $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \ldots$ sú prirodzené a len konečne veľa z nich je kladných. Číslo $3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdots$ je súčinom nepárnych (prvo)čísel, je teda nepárne, čiže má tvar $2y + 1$ pre nejaké prirodzené číslo y. Potom platí $n + 1 = 2^{\alpha_2}(2y + 1)$. Nech ešte $x = \alpha_2$. Potom platí $f(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1 = (n + 1) - 1 = n$, a teda $n \in \mathrm{Rng}(f)$.

- **Zadanie:**

  Nájdite bijekciu z $\mathbb{N}^4$ na $\mathbb{N}$.

  Riešenie:

  Nech f je ľubovoľná párujúca funkcia (t. j. bijekcia z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$) (napríklad tá z predošlej úlohy). Definujme h vzťahom

  $$h(x, y, z, w) = f(f(x, y), f(z, w)).$$

  Dokážeme obe podmienky:

  - h je injektívna:
    $h(x_1, y_1, z_1, w_1) = h(x_2, y_2, z_2, w_2)$,
    akk $f(f(x_1, y_1), f(z_1, w_1)) = f(f(x_2, y_2), f(z_2, w_2))$
    (podľa definície h),
    akk $\langle f(x_1, y_1), f(z_1, w_1) \rangle = \langle f(x_2, y_2), f(z_2, w_2) \rangle$
    (lebo f je injektívna),
    akk $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ a $f(z_1, w_1) = f(z_2, w_2)$
    (vlastnosť usporiadaných dvojíc),
    akk $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$ a $\langle z_1, w_1 \rangle = \langle z_2, w_2 \rangle$
    (lebo f je injektívna),
    akk $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$ a $z_1 = z_2$ a $w_1 = w_2$
    (vlastnosť usporiadaných dvojíc),
    akk $\langle x_1, y_1, z_1, w_1 \rangle = \langle x_2, y_2, z_2, w_2 \rangle$
    (vlastnosť usporiadaných štvoríc).
  - h je surjektívna na $\mathbb{N}$:
    Nech $n \in \mathbb{N}$. Keďže f je surjektívna na $\mathbb{N}$, platí:
    - Existujú prirodzené čísla a a b také, že $f(a, b) = n$.
    - Existujú prirodzené čísla x a y také, že $f(x, y) = a$.
    - Existujú prirodzené čísla z a w také, že $f(z, w) = b$.

    Potom platí $h(x, y, z, w) = f(f(x, y), f(z, w)) = f(a, b) = n$, takže $n \in \mathrm{Rng}(h)$.

Domáce úlohy

---

1 Nájdite bijekciu z $\mathbb{Z} \times [0, 1)$ na $\mathbb{R}$.

2 Nech funkcia f z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ je definovaná vzťahom

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y, & \text{ak } x > y, \\ y(y + 1) + x, & \text{ak } x \leq y. \end{cases}$$

Zistite hodnoty $f(x, y)$ pre všetky x a y z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ a vpíšte ich do príslušnej súradnicovej sústavy.

3 Nech funkcia f z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ je definovaná vzťahom

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y, & \text{ak } x > y, \\ y(y+1) + x, & \text{ak } x \le y. \end{cases}$$

Dokážte, že f je párujúca funkcia.

4 Nájdite bijekciu z $\mathbb{N}^5$ na $\mathbb{N}^2$.

5 Nájdite bijekciu z $\mathbb{N}^3$ na $\mathbb{N}^5$.
