ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

9. cvičenie

- **Zadanie:**

  Zistite, či funkcia $f \circ g$ musí byť

  a) injektívna,

  b) surjektívna na C

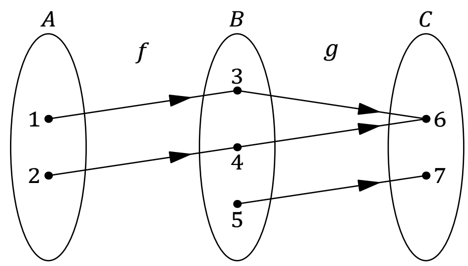
  pre každú trojicu množín A, B, C a dvojicu funkcií f a g, kde $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{\text{na}}{\to} C$.

  Riešenie:

  Nájdeme spoločný kontrapríklad pre obe časti:

  Uvedomme si, že ak by bola aj f surjektívna na B, funkcia $f \circ g$ by bola surjektívna na C, a ak by bola aj g injektívna na, funkcia $f \circ g$ by bola tiež injektívna. V našom kontrapríklade (ak, pravdaže, existuje) teda f nemôže byť sutjektívna na B a g nemôže byť injektívna. Za týchto predpokladov už pomerne ľahko nájdeme kontrapríklad. Jeden z nich je tento:

  Nech $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ a $C = \{6, 7\}$ a nech ďalej $f = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$ a $g = \{\langle 3, 6\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 5, 7\rangle\}$.



  Ľahko vidieť, že naozaj platí $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{\text{na}}{\to} C$. Potom $f \circ g = \{\langle 1, 6\rangle, \langle 2, 6\rangle\}$, avšak táto funkcia nie je ani injektívna, ani surjektívna na C.

- **Zadanie:**

  a) Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami X a $f^{-1}[f[X]]$ musia platiť pre každú funkciu f a každú podmnožinu X množiny $\mathrm{dom}(f)$.

  b) Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami Y a $f[f^{-1}[Y]]$ musia platiť pre každú funkciu f z nejakej množiny do množiny B a každú podmnožinu Y množiny B.

  Riešenie:

  a)
  - Ukážeme, že inklúzia $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$ platí vždy:
    $x \in X$
    (predpoklad s cieľom $x \in f^{-1}[f[X]]$),
    $f(x) \in f[X]$
    (definícia $f[X]$),
    $x \in f^{-1}[f[X]]$
    (definícia $f^{-1}[f[X]]$).
  - Ukážeme, že opačná inklúzia $X \supseteq f^{-1}[f[X]]$ neplatí vždy:
    Nech $f = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ a $X = \{1\}$. Potom $f^{-1}[f[X]] = f^{-1}[f[\{1\}]] = f^{-1}[\{3\}] = \{1, 2\}$.

  b)
  - Ukážeme, že inklúzia $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$ platí vždy:
    $y \in f[f^{-1}[Y]]$
    (predpoklad s cieľom $y \in Y$),
    $\exists x(x \in f^{-1}[Y] \land f(x) = y)$
    (definícia $f[X]$),

$\exists x(f(x) \in Y \wedge f(x) = y)$
 (definícia $f^{-1}[Y]$),
$\exists x(y \in Y \wedge f(x) = y)$
 (lebo $y = f(x)$),
$\exists x(y \in Y)$
 (lebo $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$),
$y \in Y$
 (kvantifikátor je irelevantný, lebo jeho premenná je nezúčastnená).

- Ukážeme, že opačná inklúzia $f[f^{-1}[Y]] \supseteq Y$ neplatí vždy:
  Nech $B = \{1\}$, $f = \emptyset$ a $Y = \{1\}$. Potom $f^{-1}[f[X]] = f[f^{-1}[\{1\}]] = f[\emptyset] = \emptyset$.

- **Zadanie:**

  a) Nájdite všetky zhodné zobrazenia, v ktorých je daný rovnostranný trojuholník samodružný.

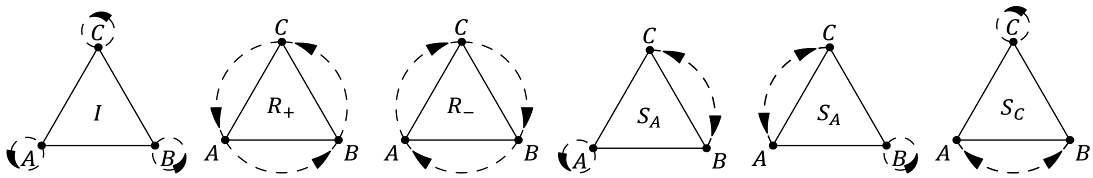
  b) Zistite všetky možné zloženia týchto zobrazení.

Riešenie:

Označme vrcholy daného trojuholníka A, B, C proti smeru hodinových ručičiek.

Uvedomme si, že v každom zhodnom zobrazení sa každý vrchol zobrazí opäť na niektorý z vrcholov a že takýmto určením všetkých troch vrcholov je už toto zhodné zobrazenie jednoznačne dané. Stačí teda uvažovať zobrazenia množiny $\{A, B, C\}$ na seba. Pretože ide o zhodné zobrazenia, musia to byť bijekcie. Keďže je trojuholník ABC rovnostranný, vzájomné vzdialenosti všetkých vrcholov sú zhodné, a teda bude vyhovovať ľubovoľná takáto bijekcia.

a) Ako ľahko vidieť, takýchto bijekcií je $3! = 6$. Vypíšme ich a označme:



X	$I(X)$	$R_+(X)$	$R_-(X)$	$S_A(X)$	$S_B(X)$	$S_C(X)$
A	A	B	C	A	C	B
B	B	C	A	C	B	A
C	C	A	B	B	A	C

Ľahko vidieť, že I zodpovedá identite na príslušnej rovine trojuholníka, R_+ a R_- otočeniam okolo stredu trojuholníka o $+120°$, resp. $-120°$ a S_A, S_B a S_C osovým súmernostiam podľa výšok z vrcholov A, B, resp. C.

b) Ako vieme, zloženie bijekcií z $\{A, B, C\}$ do $\{A, B, C\}$ je bijekcia z $\{A, B, C\}$ do $\{A, B, C\}$. Zložením ľubovoľných dvoch bijekcií z množiny $\{I, R_+, R_-, S_A, S_B, S_C\}$ bude preto opäť niektorý prvok z tejto množiny.
Všimnime si napríklad zložené zobrazenie $R_+ \circ S_A$:

- $(R_+ \circ S_A)(A) = S_A(R_+(A)) = S_A(B) = C$.
- $(R_+ \circ S_A)(B) = S_A(R_+(B)) = S_A(C) = B$.
- $(R_+ \circ S_A)(C) = S_A(R_+(C)) = S_A(A) = A$.

To teda znamená, že $R_+ \circ S_A = S_B$.
Pre zložené zobrazenie $S_A \circ S_B$ platí:

- $(S_A \circ S_B)(A) = S_B(S_A(A)) = S_B(A) = C$.
- $(S_A \circ S_B)(B) = S_B(S_A(B)) = S_B(C) = A$.
- $(S_A \circ S_B)(C) = S_B(S_A(C)) = S_B(B) = B$.

To teda znamená, že $S_A \circ S_B = R_-$.
Analogicky možno zistiť ostatné zložené zobrazenia a vyplniť nimi nasledujúcu tabuľku (v každom políčku je výsledok zloženie zobrazenia z riadku so zobrazením zo stĺpca):

$\circ$	I	R_+	R_-	S_A	S_B	S_C
I	I	R_+	R_-	S_A	S_B	S_C
R_+	R_+	R_-	I	S_B	S_C	S_A
R_-	R_-	I	R_+	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	I	R_-	R_+
S_B	S_B	S_A	S_C	R_+	I	R_-
S_C	S_C	S_B	S_A	R_-	R_+	I

Ako bonus si všimnime niektoré zaujímavosti:

- Pre každé X platí $X \circ I = I \circ X = X$. Hovoríme preto, že prvok I je *neutrálny*.
- Operácia $\circ$ nie je komutatívna, napríklad $S_A \circ S_B = R_-$, ale $S_B \circ S_A = R_+$. Dá sa však preveriť, že je asociatívna.
- V každom riadku i stĺpci sa vyskytuje všetkých šesť zobrazení. Špeciálne sa tam nachádza I, čo znamená, že ku každému prvku tu existuje inverzný.
- Každý z prvkov S_A, S_B a S_C (ale aj I) je inverzný sám k sebe, kým prvky R_+ a R_- sú inverzné navzájom.

Takúto štruktúru nazývame *grupa*, šoeciálne ide o tzv. *symetrickú grupu* na 3-prvkovej množine.

Domáce úlohy

---

1 Zistite, či funkcia $f \circ g$ musí byť

a) injektívna,
b) surjektívna na C

pre každú trojicu množín A, B, C a dvojicu funkcií f a g, kde $f : A \overset{\text{na}}{\to} B$ a $g : B \overset{\text{1-1}}{\to} C$.

2 a) Nájdite všetky zhodné zobrazenia, v ktorých je daný obdĺžnik, ktorý nie je štvorcom, samodružný.
b) Zistite všetky možné zloženia týchto zobrazení.

3 Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami

a) $f[\bigcup_{i \in I} X_i]$ a $\bigcup_{i \in I} f[X_i]$;
b) $f[\bigcap_{i \in I} X_i]$ a $\bigcap_{i \in I} f[X_i]$

musia platiť pre každú funkciu f a každý systém $\{X_i : i \in I\}$ podmnožín množiny $\mathrm{dom}(f)$.

4 Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami

a) $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} Y_i]$ a $\bigcup_{i \in I} f^{-1}[Y_i]$;
b) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} X_i]$ a $\bigcap_{i \in I} f^{-1}[X_i]$

musia platiť pre každú funkciu f z nejakej množiny do množiny B a každý systém $\{Y_i : i \in I\}$ podmnožín množiny B.

5 Dokážte, že inverzná funkcia je injektívna.