# ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

# 8. cvičenie

- **Zadanie:**

  Zistite, ako vyzerá ekvivalencia prislúchajúca rozkladu množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ na množiny $\{4, 6\}$, $\{1, 2, 10\}$, $\{5\}$, $\{3, 7, 8, 9\}$, a napíšte triedy všetkých jej prvkov.

  **Riešenie:**

  Hľadaná ekvivalencia je

  $$\sim\ = \{\langle 4,4\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 6,6\rangle\} \cup$$
  $$\cup \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,10\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 10,1\rangle, \langle 10,2\rangle, \langle 10,10\rangle\} \cup$$
  $$\cup \{\langle 5,5\rangle\} \cup$$
  $$\cup \{\langle 3,3\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 3,8\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 7,3\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 7,8\rangle, \langle 7,9\rangle,$$
  $$\langle 8,3\rangle, \langle 8,7\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 8,9\rangle, \langle 9,3\rangle, \langle 9,7\rangle, \langle 9,8\rangle, \langle 9,9\rangle\}.$$

  Jej triedy ekvivalencie sú:

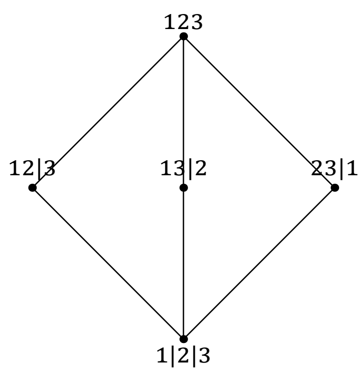
  $[1]_\sim = \{1, 2, 10\}$,
  $[2]_\sim = \{1, 2, 10\}$,
  $[3]_\sim = \{3, 7, 8, 9\}$,
  $[4]_\sim = \{4, 6\}$,
  $[5]_\sim = \{5\}$,
  $[6]_\sim = \{4, 6\}$,
  $[7]_\sim = \{3, 7, 8, 9\}$,
  $[8]_\sim = \{3, 7, 8, 9\}$,
  $[9]_\sim = \{3, 7, 8, 9\}$,
  $[10]_\sim = \{1, 2, 10\}$.

- **Zadanie:**

  Načrtnite Hasseho diagram množiny rozkladov množiny $\{1, 2, 3\}$ usporiadanej reláciou zjemnenia.

  **Riešenie:**

  Kvôli prehľadnosti nahraďme čiarky medzi množinami rozkladu znakom | a ostatné čiarky a zátvorky nepíšme. (Teda napríklad namiesto $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ napíšeme len 12|3.)

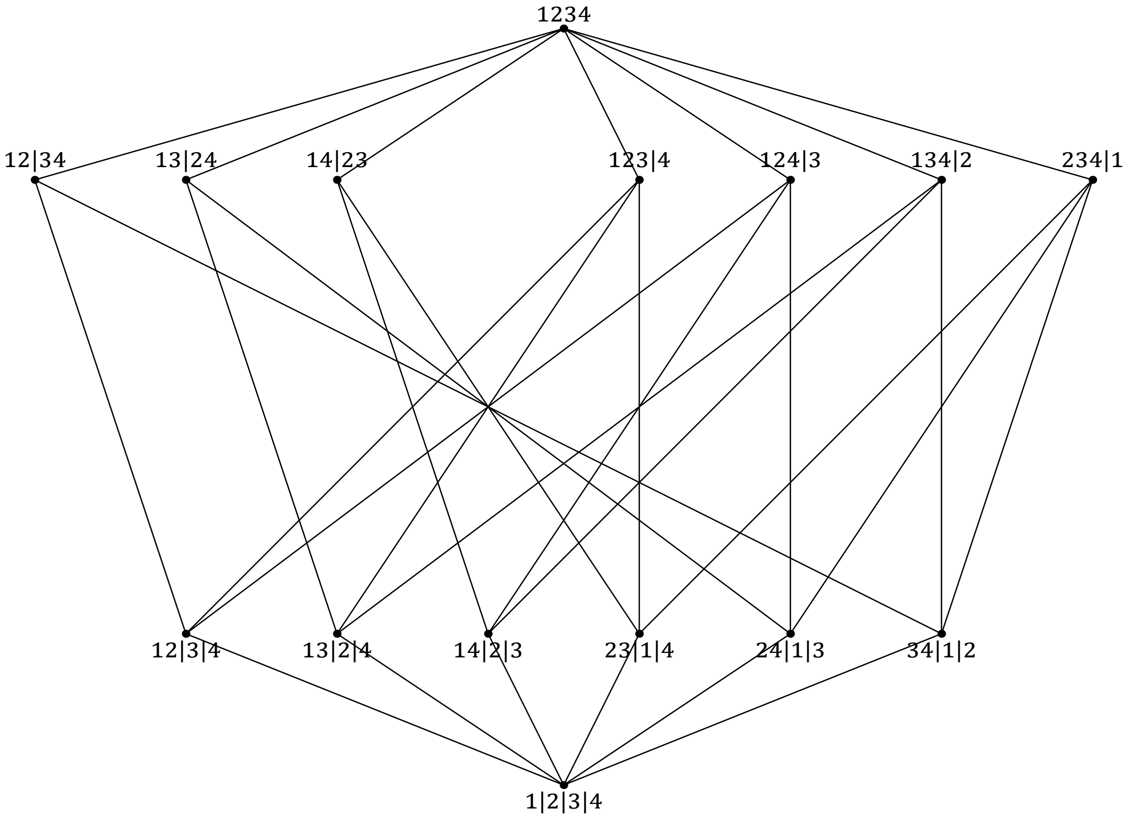


- **Zadanie:**

  Načrtnite Hasseho diagram množiny rozkladov množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ usporiadanej reláciou zjemnenia.

  **Riešenie:**

  Kvôli prehľadnosti nahraďme čiarky medzi množinami rozkladu znakom | a ostatné čiarky a zátvorky nepíšme. (Teda napríklad namiesto $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ napíšeme len 12|3|4.)




---

- **Zadanie:**

  Rozhodnite, či zjednotenie ekvivalencií (na tej istej množine) musí byť tiež ekvivalencia (na tej istej množine).

  **Riešenie:**

  Nech $R_1$ je ekvivalencia prislúchajúca rozkladu $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ a $R_2$ ekvivalencia rozkladu $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Potom však $\langle 1, 2\rangle \in R_1$ a $\langle 2, 3\rangle \in R_2$, z čoho $\langle 1, 2\rangle \in (R_1 \cup R_2)$ a $\langle 2, 3\rangle \in (R_1 \cup R_2)$, avšak $\langle 1, 3\rangle \notin (R_1 \cup R_2)$. To znamená, že relácia $R_1 \cup R_2$ nie je tranzitívna, čiže to nie je ani ekvivalencia.

---

- **Zadanie:**

  Rozhodnite, či prienik ekvivalencií na danej množine musí byť tiež ekvivalencia na tejto množine.

  **Riešenie:**

  Nech $A$ je množina a nech pre každé $i$ z neprázdnej množiny $I$ je $R_i$ ekvivalencia na $A$. Ukážeme, že $\bigcap_{i\in I} R_i$ je ekvivalencia na $A$:

  - $\bigcap_{i\in I} R_i$ je reflexívna na $A$:
    - Nech $x \in A$. Potom postupne platí:
      pre každé $i$ z $I$ platí $\langle x, x\rangle \in R_i$
      (lebo $R_i$ je reflexívna na $A$),
      $\langle x, x\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$
      (definícia prieniku systému).
  - $\bigcap_{i\in I} R_i$ je symetrická:

- $\langle x, y\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$,
  akk pre každé $i$ z $I$ platí $\langle x, y\rangle \in R_i$
  (definícia prieniku systému),
  ztv pre každé $i$ z $I$ platí $\langle y, x\rangle \in R_i$
  (lebo $R_i$ je symetrická),
  akk $\langle y, x\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$
  (definícia prieniku systému).

- $\bigcap_{i\in I} R_i$ je tranzitívna:
  - $\langle x, y\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$ a $\langle y, z\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$,
    akk pre každé $i$ z $I$ platí $\langle x, y\rangle \in R_i$ a pre každé $i$ z $I$ platí $\langle y, z\rangle \in R_i$
    (definícia prieniku systému),
    akk pre každé $i$ z $I$ platí $\langle x, y\rangle \in R_i$ a $\langle y, z\rangle \in R_i$
    (reformulácia),
    ztv pre každé $i$ z $I$ platí $\langle x, z\rangle \in R_i$
    (lebo $R_i$ je tranzitívna),
    akk $\langle x, z\rangle \in \bigcap_{i\in I} R_i$
    (definícia prieniku systému).

---

- **Zadanie:**

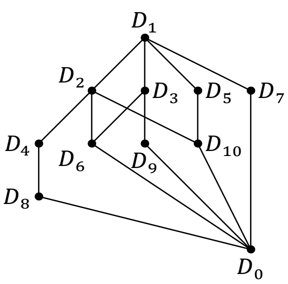
  Načrtnite Hasseho diagram množiny rozkladov množiny $\mathbb{N}$, ktoré prislúchajú ekvivalenciám $\equiv_n$, kde $n \in \{0, \dots, 10\}$, usporiadanej reláciou zjemnenia.

  **Riešenie:**

  Kvôli prehľadnosti označme $D_n$ rozklad $\mathbb{N}$, ktorý prislúcha ekvivalencii $\equiv_n$. Platí teda:

  - $D_0 = \{[a]_{\equiv_0} : a \in \mathbb{N}\} = \{\{a\} : a \in \mathbb{N}\}$,
  - $D_1 = \{[0]_{\equiv_1}\} = \{\mathbb{N}\}$,
  - $D_2 = \{[0]_{\equiv_2}, [1]_{\equiv_2}\} = \{\{0, 2, 4, \dots\}, \{1, 3, 5, \dots\}\}$,
  - $D_3 = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\} = \{\{0, 3, 6, \dots\}, \{1, 4, 7, \dots\}, \{2, 5, 8, \dots\}\}$,
  - $D_4 = \{[0]_{\equiv_4}, [1]_{\equiv_4}, [2]_{\equiv_4}, [3]_{\equiv_4}\} = \{\{0, 4, 8, \dots\}, \{1, 5, 9, \dots\}, \{2, 6, 10, \dots\}, \{3, 7, 11, \dots\}\}$,
  - $D_5 = \{[0]_{\equiv_5}, [1]_{\equiv_5}, [2]_{\equiv_5}, [3]_{\equiv_5}, [4]_{\equiv_5}\}$
    $= \{\{0, 5, 10, \dots\}, \{1, 6, 11, \dots\}, \{2, 7, 12, \dots\}, \{3, 8, 13, \dots\}, \{4, 9, 14, \dots\}\}$,
  - $D_6 = \{[0]_{\equiv_6}, [1]_{\equiv_6}, [2]_{\equiv_6}, [3]_{\equiv_6}, [4]_{\equiv_6}, [5]_{\equiv_6}\}$
    $= \{\{0, 6, 12, \dots\}, \{1, 7, 13, \dots\}, \{2, 8, 14, \dots\}, \{3, 9, 15, \dots\}, \{4, 10, 16, \dots\}, \{5, 11, 17, \dots\}\}$,
  - $D_7 = \{[0]_{\equiv_7}, [1]_{\equiv_7}, [2]_{\equiv_7}, [3]_{\equiv_7}, [4]_{\equiv_7}, [5]_{\equiv_7}, [6]_{\equiv_7}\}$
    $= \{\{0, 7, 14, \dots\}, \{1, 8, 15, \dots\}, \{2, 9, 16, \dots\}, \{3, 10, 17, \dots\}, \{4, 11, 18, \dots\}, \{5, 12, 19, \dots\}, \{6, 13, 20, \dots\}\}$,
  - $D_8 = \{[0]_{\equiv_8}, [1]_{\equiv_8}, [2]_{\equiv_8}, [3]_{\equiv_8}, [4]_{\equiv_8}, [5]_{\equiv_8}, [6]_{\equiv_8}, [7]_{\equiv_8}\}$
    $= \{\{0, 8, 16, \dots\}, \{1, 9, 17, \dots\}, \{2, 10, 18, \dots\}, \{3, 11, 19, \dots\}, \{4, 12, 20, \dots\}, \{5, 13, 21, \dots\}, \{6, 14, 22, \dots\}, \{7, 15, 23, \dots\}\}$,
  - $D_9 = \{[0]_{\equiv_9}, [1]_{\equiv_9}, [2]_{\equiv_9}, [3]_{\equiv_9}, [4]_{\equiv_9}, [5]_{\equiv_9}, [6]_{\equiv_9}, [7]_{\equiv_9}, [8]_{\equiv_9}\}$
    $= \{\{0, 9, 18, \dots\}, \{1, 10, 19, \dots\}, \{2, 11, 20, \dots\}, \{3, 12, 21, \dots\}, \{4, 13, 22, \dots\}, \{5, 14, 23, \dots\}, \{6, 15, 24, \dots\}, \{7, 16, 25, \dots\}, \{8, 17, 26, \dots\}\}$,
  - $D_{10} = \{[0]_{\equiv_{10}}, [1]_{\equiv_{10}}, [2]_{\equiv_{10}}, [3]_{\equiv_{10}}, [4]_{\equiv_{10}}, [5]_{\equiv_{10}}, [6]_{\equiv_{10}}, [7]_{\equiv_{10}}, [8]_{\equiv_{10}}, [9]_{\equiv_{10}}\}$
    $= \{\{0, 10, 20, \dots\}, \{1, 11, 21, \dots\}, \{2, 12, 22, \dots\}, \{3, 13, 23, \dots\}, \{4, 14, 24, \dots\}, \{5, 15, 25, \dots\}, \{6, 16, 26, \dots\}, \{7, 17, 27, \dots\}, \{8, 18, 28, \dots\}, \{9, 19, 29, \dots\}\}$.

  Hasseho diagram našej množiny rozkladov teda vyzerá takto:



Ako bonus dodajme, že táto relácia zjemnenia je tzv. izomorfná k inverznej relácii deliteľnosti medzi číslami z množiny $\{0, \dots, 10\}$ z cvičenia 7 (takže ich Hasseho diagramy sú navzájom prevrátené).

## Domáce úlohy

**1** Zistite, ako vyzerá ekvivalencia prislúchajúca rozkladu množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na množiny $\{0, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 9\}$ a napíšte triedy všetkých jej prvkov.

**2** Načrtnite Hasseho diagram množiny rozkladov množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ usporiadanej zjemnením.

**3** Rozhodnite, či zjednotenie usporiadaní danej množiny musí byť tiež usporiadanie tejto množiny.

**4** Rozhodnite, či prienik usporiadaní danej množiny musí byť tiež usporiadanie tejto množiny.

**5** Načrtnite Hasseho diagram množiny rozkladov množiny $\mathbb{N}$, ktoré prislúchajú ekvivalenciám $\equiv_n$, kde $n \in \{0, \dots, 20\}$, usporiadanej reláciou zjemnenia.