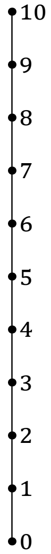
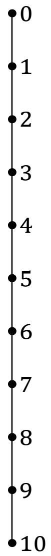
ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

7. cvičenie

- **Zadanie:**
  Načrtnite Hasseho diagram množiny $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ usporiadanej reláciou $\leq$.
  Riešenie:



- **Zadanie:**
  Načrtnite Hasseho diagram množiny $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ usporiadanej reláciou $\geq$.
  Riešenie:

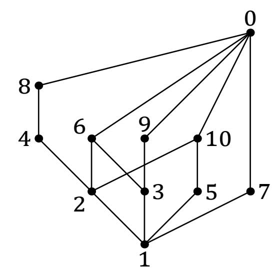


- **Zadanie:**
  Dokážte, že relácia deliteľnosti na množine $\mathbb{N}$ je usporiadanie. Je toto usporiadanie lineárne?
  Riešenie:
  Overíme, že relácia $\mid$ na množine $\mathbb{N}$ spĺňa všetky podmienky definície usporiadania:

- Relácia $\mid$ je reflexívna:
  Keďže $a = 1 \cdot a$, existuje d z $\mathbb{N}$, že $a = d \cdot a$, a teda podľa definície $a \mid a$.
- Relácia $\mid$ je antisymetrická:
  Nech $a \mid b$ a $b \mid a$. Rozoberme dve možnosti:
  - Nech $a = 0$.
    Keďže $a \mid b$, podľa definície existuje d z $\mathbb{N}$ také, že $b = d \cdot a$, a teda $b = d \cdot 0 = 0 = a$.
  - Nech $a \neq 0$.
    Potom podľa definície existujú d a e z $\mathbb{N}$ také, že $b = d \cdot a$ a $a = e \cdot b$. Po dosadení $a = e \cdot (d \cdot a) = (e \cdot d) \cdot a$, a teda $e \cdot d = 1$. To však znamená, že $e = d = 1$, takže $a = e \cdot b = 1 \cdot b = b$.
- Relácia $\mid$ je tranzitívna:
  Nech $a \mid b$ a $b \mid c$. Potom podľa definície existujú d a e z $\mathbb{N}$ také, že $b = d \cdot a$ a $c = e \cdot b$. Po dosadení $c = e \cdot (d \cdot a) = (e \cdot d) \cdot a$, a teda existuje f z $\mathbb{N}$ (konkrétne $f = e \cdot d$), že $c = f \cdot a$. To však znamená, že $a \mid c$.

Relácia $\mid$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, je to teda usporiadanie. Nie je však lineárne, lebo napr. neplatí ani $2 \mid 3$, ani $3 \mid 2$.

- **Zadanie:**
  Načrtnite Hasseho diagram množiny $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ usporiadanej reláciou deliteľnosť.
  Riešenie:



- **Zadanie:**
  Dokážte, že relácia $\preceq$ na množine dvojíc reálnych čísel definovaná vzťahom

$$\langle x_1, y_1 \rangle \preceq \langle x_2, y_2 \rangle, \text{ akk } x_1 \leq x_2 \land y_1 \leq y_2$$

  je usporiadanie. Je toto usporiadanie lineárne?
  Riešenie:
  Overíme, že relácia $\preceq$ spĺňa všetky podmienky definície usporiadania:

  - Relácia $\preceq$ je reflexívna:
    $x \leq x \land y \leq y$
    (lebo $\leq$ je (na množine reálnych čísel) reflexívna relácia),
    akk $\langle x, y \rangle \preceq \langle x, y \rangle$
    (podľa definície $\preceq$).
  - Relácia $\preceq$ je antisymetrická:
    $\langle x_1, y_1 \rangle \preceq \langle x_2, y_2 \rangle \land \langle x_2, y_2 \rangle \preceq \langle x_1, y_1 \rangle$,
    akk $(x_1 \leq x_2 \land y_1 \leq y_2) \land (x_2 \leq x_1 \land y_2 \leq y_1)$
    (podľa definície $\preceq$),
    akk $(x_1 \leq x_2 \land x_2 \leq x_1) \land (y_1 \leq y_2 \land y_2 \leq y_1)$
    (lebo konjunkcia je komutatívna a asociatívna),
    ztv $x_1 = x_2 \land y_1 = y_2$
    (lebo $\leq$ je (na množine reálnych čísel) antisymetrická relácia),
    akk $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$
    (z definície usporiadanej dvojice).

- Relácia $\preceq$ je tranzitívna:
  $\langle x_1, y_1\rangle \preceq \langle x_2, y_2\rangle \wedge \langle x_2, y_2\rangle \preceq \langle x_3, y_3\rangle$,
  akk $(x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 \leq x_3 \wedge y_2 \leq y_3)$
  (podľa definície $\preceq$),
  akk $(x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_3) \wedge (y_1 \leq y_2 \wedge y_2 \leq y_3)$
  (lebo konjunkcia je komutatívna a asociatívna),
  ztv $x_1 \leq x_3 \wedge y_1 \leq y_3$
  (lebo $\leq$ je (na množine reálnych čísel) tranzitívna relácia),
  akk $\langle x_1, y_1\rangle \preceq \langle x_3, y_3\rangle$
  (podľa definície $\preceq$).

Relácia $\preceq$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, je to teda usporiadanie. Nie je však lineárne, lebo napr. neplatí ani $\langle 1, 2\rangle \preceq \langle 2, 1\rangle$, ani $\langle 2, 1\rangle \preceq \langle 1, 2\rangle$.

- **Zadanie:**

  Dokážte, že relácia inklúzie na triede všetkých množín je usporiadanie. Je toto usporiadanie lineárne?

  Riešenie:

  Overíme, že relácia $\subseteq$ spĺňa všetky podmienky definície usporiadania:

  - Relácia $\subseteq$ je reflexívna:
    Nech A je ľubovoľná množina. Potom platí:
    $\forall x((x \in A) \rightarrow (x \in A))$
    (lebo tvrdenie $\varphi \rightarrow \varphi$ je tautológia),
    akk $A \subseteq A$
    (podľa definície $\subseteq$).
  - Relácia $\subseteq$ je antisymetrická:
    Nech A a B sú ľubovoľné množiny. Potom platí:
    $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
    akk $\forall x((x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge \forall x((x \in B) \rightarrow (x \in A))$
    (podľa definície $\subseteq$),
    akk $\forall x(((x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge ((x \in B) \rightarrow (x \in A)))$
    (distribúcia všeobecného kvantifikátora),
    akk $\forall x((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))$
    (lebo tvrdenia $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ a $\varphi \leftrightarrow \psi$ sú ekvivalentné),
    akk $A = B$
    (identita množín).
  - Relácia $\subseteq$ je tranzitívna:
    Nech A, B a C sú ľubovoľné množiny. Potom platí:
    $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$
    (podľa definície $\subseteq$),
    akk $\forall x((x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge \forall x((x \in B) \rightarrow (x \in C))$
    (podľa definície $\subseteq$),
    akk $\forall x(((x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge ((x \in B) \rightarrow (x \in C)))$
    (distribúcia všeobecného kvantifikátora),
    ztv $\forall x((x \in A) \rightarrow (x \in C))$
    (lebo z tvrdenia $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \xi)$ vyplýva tvrdenie $\varphi \rightarrow \xi$),
    akk $A \subseteq C$
    (podľa definície $\subseteq$).

  Relácia $\subseteq$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, je to teda usporiadanie. Nie je však lineárne, lebo napr. neplatí ani $\{1\} \subseteq \{2\}$, ani $\{2\} \subseteq \{1\}$.

Domáce úlohy

---

1 Načrtnite Hasseho diagram systému všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ usporiadanej inklúziou.

2 Načrtnite Hasseho diagram množiny $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$ usporiadanej reláciou deliteľnosť.

3 Načrtnite Hasseho diagram množiny $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$ usporiadanej reláciou $\preceq$ definovaná vzťahom

$$\langle x_1, y_1 \rangle \preceq \langle x_2, y_2 \rangle, \text{ akk } x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2.$$

4 Dokážte, že relácia $\preceq$ na množine dvojíc reálnych čísel definovaná vzťahom

$$\langle x_1, y_1 \rangle \preceq \langle x_2, y_2 \rangle, \text{ akk } x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \geq y_2$$

je usporiadanie. Je toto usporiadanie lineárne?

5 Dokážte, že relácia $\preceq$ na množine trojíc reálnych čísel definovaná vzťahom

$$\langle x_1, y_1, z_1 \rangle \preceq \langle x_2, y_2, z_2 \rangle, \text{ akk } x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \wedge z_1 \leq z_2$$

je usporiadanie. Je toto usporiadanie lineárne?
