ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

6. cvičenie

- **Zadanie:**

  Nech $R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,7\rangle\}$ a $S = \{\langle 3,4\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 6,7\rangle, \langle 3,3\rangle\}$. Vypočítajte reláciu $R \circ S^{-1}$.

  Riešenie:

  Najprv určme reláciu S^{-1}. Vieme, že bude obsahovať dvojice, ktoré vzniknú výmenou zložiek dvojíc z relácie S, platí teda $S^{-1} = \{\langle 4,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 7,6\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.

  Preberme postupne dvojice z relácie R a zistime, ktoré ich druhé zložky sú prvou zložkou niektorej dvojice z S^{-1}, a tak môžu slúžiť ako tranzit:

  - Druhá zložka 4 dvojice $\langle 1,4\rangle$ z R je prvou zložkou dvojíc $\langle 4,3\rangle$ a $\langle 4,5\rangle$ z S^{-1}, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 1 a 3 a tiež medzi prvkami 1 a 5. Znamená to, že $\langle 1,3\rangle \in R \circ S^{-1}$ a $\langle 1,5\rangle \in R \circ S^{-1}$.
  - Druhá zložka 5 dvojíc $\langle 1,5\rangle$ a $\langle 2,5\rangle$ z R nie je prvou zložkou žiadnej dvojice z S^{-1}, nemôže preto slúžiť ako tranzit.
  - Druhá zložka 7 dvojice $\langle 3,7\rangle$ z R je prvou zložkou dvojice $\langle 7,6\rangle$ z S^{-1}, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 3 a 6. Znamená to, že $\langle 3,6\rangle \in R \circ S^{-1}$.

  Zhrnutím dostávame, že
  $$R \circ S^{-1} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 3,6\rangle\}.$$

- **Zadanie:**

  Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $X \subseteq A$. Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami X a $R^{-1}[R[X]]$ platia.

  Riešenie:

  Ukážeme, že ani jedna z inklúzií neplatí pre každé A, B, R a X:

  - Nech $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $R = \emptyset$ a $X = \{1\}$.
    Potom $R^{-1}[R[X]] = R^{-1}[R[\{1\}]] = R^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, takže neplatí $X \subseteq R^{-1}[R[X]]$.
  - Nech $A = \{1,2\}$, $B = \{3\}$, $R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ a $X = \{1\}$.
    Potom $R^{-1}[R[X]] = R^{-1}[R[\{1\}]] = R^{-1}[\{3\}] = \{1,2\}$, takže neplatí $X \supseteq R^{-1}[R[X]]$.

- **Zadanie:**

  Nájdite tranzitívny uzáver relácie
  $$\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,12\rangle, \langle 1,13\rangle, \langle 2,12\rangle,$$
  $$\langle 2,23\rangle, \langle 3,13\rangle, \langle 3,23\rangle, \langle 12,123\rangle, \langle 13,123\rangle, \langle 23,123\rangle\}.$$

  Riešenie:

  Označme túto reláciu R a zistime jej iterácie $R^{(n)}$ pre každé kladné prirodzené číslo n:

  - $R^{(1)} = R$.
  - $R^{(2)} = R \circ R$:

    Preberme postupne dvojice z relácie R a zistime, ktoré ich druhé zložky môžu slúžiť ako tranzit:

    - Druhá zložka 1 dvojice $\langle 0,1\rangle$ z R je prvou zložkou dvojíc $\langle 1,12\rangle$ a $\langle 1,13\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 0 a 12 a tiež medzi prvkami 0 a 13. Znamená to, že $\langle 0,12\rangle \in R^{(2)}$ a $\langle 0,13\rangle \in R^{(2)}$.
    - Druhá zložka 2 dvojice $\langle 0,2\rangle$ z R je prvou zložkou dvojíc $\langle 2,12\rangle$ a $\langle 2,23\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 0 a 12 a tiež medzi prvkami 0 a 23. Znamená to, že $\langle 0,12\rangle \in R^{(2)}$ (čo už vieme) a $\langle 0,23\rangle \in R^{(2)}$.

- Druhá zložka 3 dvojice $\langle 0, 3\rangle$ z R je prvou zložkou dvojíc $\langle 3, 13\rangle$ a $\langle 3, 23\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 0 a 13 a tiež medzi prvkami 0 a 23. Znamená to, že $\langle 0, 13\rangle \in R^{(2)}$ (čo už vieme) a $\langle 0, 23\rangle \in R^{(2)}$ (čo už tiež vieme).
- Druhá zložka 12 dvojice $\langle 1, 12\rangle$ z R je prvou zložkou dvojice $\langle 12, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 1 a 123. Znamená to, že $\langle 1, 123\rangle \in R^{(2)}$.
- Druhá zložka 13 dvojice $\langle 1, 13\rangle$ z R je prvou zložkou dvojice $\langle 13, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 1 a 123. Znamená to, že $\langle 1, 123\rangle \in R^{(2)}$ (čo už vieme).
- Druhá zložka 12 dvojice $\langle 2, 12\rangle$ z R je prvou zložkou dvojice $\langle 12, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 2 a 123. Znamená to, že $\langle 2, 123\rangle \in R^{(2)}$.
- Druhá zložka 23 dvojice $\langle 2, 23\rangle$ z R je prvou zložkou dvojice $\langle 23, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 23 a 123. Znamená to, že $\langle 2, 123\rangle \in R^{(2)}$ (čo už vieme).
- Druhá zložka 13 dvojice $\langle 3, 13\rangle$ z R je prvou zložkou dvojice $\langle 13, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 13 a 123. Znamená to, že $\langle 3, 123\rangle \in R^{(2)}$.
- Druhá zložka 23 dvojice $\langle 3, 23\rangle$ z R je prvou zložkou dvojice $\langle 23, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 23 a 123. Znamená to, že $\langle 3, 123\rangle \in R^{(2)}$ (čo už vieme).
- Druhá zložka 123 dvojíc $\langle 12, 123\rangle$, $\langle 13, 123\rangle$ a $\langle 23, 123\rangle$ z R nie je prvou zložkou žiadnej dvojice z R, nemôže preto slúžiť ako tranzit.

Zhrnutím dostávame, že

$$R^{(2)} = \{\langle 0, 12\rangle, \langle 0, 13\rangle, \langle 0, 23\rangle, \langle 1, 123\rangle, \langle 2, 123\rangle, \langle 3, 123\rangle\}.$$

- $R^{(3)} = R^{(2)} \circ R$:
  Preberme postupne dvojice z relácie $R^{(2)}$ a zistime, ktoré ich druhé zložky môžu slúžiť ako tranzit:
  - Druhá zložka 12 dvojice $\langle 0, 12\rangle$ z $R^{(2)}$ je prvou zložkou dvojice $\langle 12, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 0 a 123. Znamená to, že $\langle 0, 123\rangle \in R^{(3)}$.
  - Druhá zložka 13 dvojice $\langle 0, 13\rangle$ z $R^{(2)}$ je prvou zložkou dvojice $\langle 13, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 0 a 123. Znamená to, že $\langle 0, 123\rangle \in R^{(3)}$ (čo už vieme).
  - Druhá zložka 23 dvojice $\langle 0, 23\rangle$ z $R^{(2)}$ je prvou zložkou dvojice $\langle 23, 123\rangle$ z R, takže slúži ako tranzit medzi prvkami 0 a 123. Znamená to, že $\langle 0, 123\rangle \in R^{(3)}$ (čo už vieme).
  - Druhá zložka 123 dvojíc $\langle 1, 123\rangle$, $\langle 2, 123\rangle$ a $\langle 3, 123\rangle$ z $R^{(2)}$ nie je prvou zložkou žiadnej dvojice z R, nemôže preto slúžiť ako tranzit.

  Zhrnutím dostávame, že
  $$R^{(3)} = \{\langle 0, 123\rangle\}.$$
- $R^{(4)} = R^{(3)} \circ R$:
  Jediná dvojica $\langle 0, 123\rangle$ z relácie $R^{(3)}$ nie je prvou zložkou žiadnej dvojice z R, nemôže preto slúžiť ako tranzit. Znamená to, že
  $$R^{(4)} = \emptyset.$$
- $R^{(5)} = R^{(4)} \circ R = \emptyset \circ R = \emptyset$.
- $R^{(6)} = R^{(5)} \circ R = \emptyset \circ R = \emptyset$.
- $R^{(7)} = R^{(6)} \circ R = \emptyset \circ R = \emptyset$.
- …

Tranzitívny uzáver relácie R je teda

$$R^{(+)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} R^{(n)} = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup R^{(4)} \cup \cdots = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} =$$

$$= \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 12\rangle, \langle 1, 13\rangle, \langle 2, 12\rangle, \langle 2, 23\rangle,$$

$$\langle 3, 13\rangle, \langle 3, 23\rangle, \langle 12, 123\rangle, \langle 13, 123\rangle, \langle 23, 123\rangle\} \cup$$

$$\cup \{\langle 0, 12\rangle, \langle 0, 13\rangle, \langle 0, 23\rangle, \langle 1, 123\rangle, \langle 2, 123\rangle, \langle 3, 123\rangle\} \cup \{\langle 0, 123\rangle\}.$$

- **Zadanie:**

  Nech A, B, C, D sú triedy a nech $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$. Dokážte, že

  $$(R \circ S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} \circ R^{-1}.$$

  Riešenie 1:

  Nech $a \in A$ a $d \in D$. Potom platí:

  $\langle d, a \rangle \in (R \circ S \circ T)^{-1}$,
  akk $\langle a, d \rangle \in (R \circ S \circ T)$
  (definícia inverznej relácie),
  akk $\langle a, d \rangle \in ((R \circ S) \circ T)$
  (na uzátvorkovaní nezáleží, lebo zloženie je asociatívna operácia),
  akk $(\exists c \in C)(\langle a, c \rangle \in (R \circ S) \land \langle c, d \rangle \in T)$
  (definícia zloženia),
  akk $(\exists c \in C)(((\exists b \in B)\langle a, b \rangle \in R \land \langle b, c \rangle \in S) \land \langle c, d \rangle \in T)$
  (definícia zloženia),
  akk $(\exists c \in C)(\exists b \in B)((\langle a, b \rangle \in R \land \langle b, c \rangle \in S) \land \langle c, d \rangle \in T)$
  (tvrdenie $\langle c, d \rangle \in T$ neobsahuje b),
  akk $(\exists c \in C)(\exists b \in B)(\langle a, b \rangle \in R \land (\langle b, c \rangle \in S \land \langle c, d \rangle \in T))$
  (asociativita konjunkcie),
  akk $(\exists b \in B)(\exists c \in C)(\langle a, b \rangle \in R \land (\langle b, c \rangle \in S \land \langle c, d \rangle \in T))$
  (výmena kvantifikátorov rovnakého druhu),
  akk $(\exists b \in B)(\langle a, b \rangle \in R \land ((\exists c \in C)(\langle b, c \rangle \in S \land \langle c, d \rangle \in T)))$
  (tvrdenie $\langle a, b \rangle \in R$ neobsahuje c),
  akk $(\exists b \in B)(\langle b, a \rangle \in R^{-1} \land ((\exists c \in C)(\langle c, b \rangle \in S^{-1} \land \langle d, c \rangle \in T^{-1})))$
  (definícia inverznej relácie (trikrát)),
  akk $(\exists b \in B)(\langle b, a \rangle \in R^{-1} \land ((\exists c \in C)(\langle d, c \rangle \in T^{-1} \land \langle c, b \rangle \in S^{-1})))$
  (komutativita konjunkcie),
  akk $(\exists b \in B)(\langle b, a \rangle \in R^{-1} \land \langle d, b \rangle \in (T^{-1} \circ S^{-1}))$
  (definícia zloženia),
  akk $(\exists b \in B)(\langle d, b \rangle \in (T^{-1} \circ S^{-1}) \land \langle b, a \rangle \in R^{-1})$
  (komutativita konjunkcie),
  akk $\langle d, a \rangle \in ((T^{-1} \circ S^{-1}) \circ R^{-1})$,
  (definícia zloženia),
  akk $\langle d, a \rangle \in (T^{-1} \circ S^{-1} \circ R^{-1})$,
  (na uzátvorkovaní nezáleží, lebo zloženie je asociatívna operácia).

  Ukázali sme, že relácie $(R \circ S \circ T)^{-1}$ a $T^{-1} \circ S^{-1} \circ R^{-1}$, ktoré sú podtriedami $D \times A$, obsahujú tie isté dvojice z $D \times A$, a teda sa rovnajú.

  Riešenie 2:

  Využijeme opakovane, že inverzná relácia k zloženiu relácií je opačné zloženie inverzných relácií. Postupne platí:

  $$(R \circ S \circ T)^{-1} = ((R \circ S) \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ (R \circ S)^{-1} =$$
  $$= T^{-1} \circ (S^{-1} \circ R^{-1}) = T^{-1} \circ S^{-1} \circ R^{-1}.$$

- **Zadanie:**

  Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $X_1, X_2 \subseteq A$. Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami $R[X_1 \cap X_2]$ a $R[X_1] \cap R[X_2]$ platia.

  Riešenie:

  - Ukážeme, že druhá je podmnožinou prvej:

    Nech $y \in B$. Potom platí:

    $y \in R[X_1 \cap X_2]$,
    akk $\exists x((x \in X_1 \cap X_2) \land \langle x, y \rangle \in R)$
    (definícia druhých zložiek),
    akk $\exists x((x \in X_1 \land x \in X_2) \land \langle x, y \rangle \in R)$
    (definícia prieniku),

akk $\exists x((x \in X_1 \wedge \langle x, y\rangle \in R) \wedge (x \in X_2 \wedge \langle x, y\rangle \in R))$
(vlastnosti konjunkcie),
ztv $\exists x(x \in X_1 \wedge \langle x, y\rangle \in R) \wedge \exists x(x \in X_2 \wedge \langle x, y\rangle \in R))$
(distribúcia kvantifikátora),
akk $y \in R[X_1] \wedge y \in R[X_2]$
(definícia druhých zložiek (použitá dvakrát)),
akk $y \in R[X_1] \cap R[X_2]$
(definícia prieniku).
Ukázali sme, že všetky prvky množiny $R[X_1 \cap X_2]$ sú aj prvkami množiny $R[X_1] \cap R[X_2]$, takže platí $R[X_1 \cap X_2] \subseteq R[X_1] \cap R[X_2]$, a to bez ohľadu na voľbu A, B, R, X_1 a X_2.

- Ukážeme, že prvá nemusí byť podmnožinou druhej:
  Nech $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$, $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, $X_1 = \{1\}$ a $X_2 = \{2\}$.
  Potom $R[X_1] \cap R[X_2] = R[\{1\}] \cap R[\{2\}] = \{3\} \cap \{3\} = \{3\}$, ale $R[X_1 \cap X_2] = R[\{1\} \cap \{2\}] = R[\emptyset] = \emptyset$.

Domáce úlohy

1 Nech $R = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 7\rangle\}$ a $S = \{\langle 3, 4\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 6, 7\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$. Vypočítajte reláciu $(S^{-1} \circ R)^{-1} \circ S^{-1}$.

2 Nájdite tranzitívny uzáver relácie

$$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 1, 7\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 2, 10\rangle, \langle 3, 6\rangle,$$

$$\langle 3, 9\rangle, \langle 4, 8\rangle, \langle 5, 10\rangle, \langle 6, 0\rangle, \langle 7, 0\rangle, \langle 8, 0\rangle, \langle 9, 0\rangle, \langle 10, 0\rangle\}.$$

3 Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $Y \subseteq B$. Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami Y a $R[R^{-1}[Y]]$ platia.

4 Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $X_1, X_2 \subseteq A$. Zistite, ktoré inklúzie medzi množinami $R[X_1 \cup X_2]$ a $R[X_1] \cup R[X_2]$ platia.

5 Nech A a B sú množiny a R je relácia na množine $A \times B$. Nech $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Zistite, ktoré inklúzie medzi nasledujúcimi množinami platia:

a) $R^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$ a $R^{-1}[Y_1] \cup R^{-1}[Y_2]$;
b) $R^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$ a $R^{-1}[Y_1] \cap R^{-1}[Y_2]$.

Prémiová domáca úloha

***** Nech R je relácia. Dokážte, že

$$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^{(n)}.$$