ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

5. cvičenie

- **Zadanie:**

  Nájdite príklad relácie, ktorá je reflexívna (na príslušnej množine) a symetrická, ale nie je tranzitívna.

  Riešenie:

  Ak chceme, aby naša relácia nebola tranzitívna, musia existovať tri objekty x, y a z také, že dvojice $\langle x, y\rangle$ a $\langle y, z\rangle$ do nej patria, ale $\langle x, z\rangle$ nie. Ak je to relácia R na množine A, a ak (napríklad) $x = 1$, $y = 2$ a $z = 3$, tak $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle \in R$, ale $\langle 1, 3\rangle \notin R$, pričom $1, 2, 3 \in A$. Relácia R má byť symetrická, takže potom platí aj tak $\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle \in R$, ale $\langle 3, 1\rangle \notin R$. Relácia R má byť aj reflexívna, takže musí platiť $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle \in R$. Ak (napríklad) $A = \{1, 2, 3\}$, vyjadrili sme sa ku každej dvojici z $A \times A$, zhrnutím teda

  $$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}.$$

  Overíme, že R spĺňa všetky požadované podmienky:

  - Keďže $A = \{1, 2, 3\}$ a $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle \in R$, relácia R je naozaj reflexívna (na množine A).
  - Podmienka symetrie $((\langle x, y\rangle \in R) \rightarrow (\langle y, x\rangle \in R))$ je v prípade $x = y$ splnená automaticky, overovať má preto význam len tie prípady, keď $x \neq y$. Aj v prípade, že $\langle x, y\rangle \notin R$, je tiež triviálne splnená, stačí teda overovať len prípady, keď $\langle x, y\rangle \in R$. Overme ich teda:
    - Tvrdenie $(\langle 1, 2\rangle \in R) \rightarrow (\langle 2, 1\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho záver.
    - Tvrdenie $(\langle 2, 1\rangle \in R) \rightarrow (\langle 1, 2\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho záver.
    - Tvrdenie $(\langle 2, 3\rangle \in R) \rightarrow (\langle 3, 2\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho záver.
    - Tvrdenie $(\langle 3, 2\rangle \in R) \rightarrow (\langle 2, 3\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho záver.
  - Keďže $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle \in R$, ale $\langle 1, 3\rangle \notin R$, relácia R nie je tranzitívna.

- **Zadanie:**

  Nájdite príklad relácie, ktorá je symetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna (na príslušnej množine).

  Riešenie:

  Ľahko vidieť, že relácia $\emptyset$ je triviálne symetrická i tranzitívna, keďže tieto podmienky majú formu implikácií, ktorých predpoklady nemožno splniť. Aby relácia $\emptyset$ nebola reflexívna, musí byť príslušná množina jednoprvková. Riešením je teda (napríklad) relácia $\emptyset$ na množine $\{1\}$.

- **Zadanie:**

  Nájdite príklad relácie, ktorá je tranzitívna a reflexívna (na príslušnej množine), ale nie je symetrická.

  Riešenie:

  Ak chceme, aby naša relácia nebola symetrická, musia existovať dva objekty x a y také, že $\langle x, y\rangle$ do nej patrí, ale $\langle y, x\rangle$ nie. Ak je to relácia R na množine A, a ak (napríklad) $x = 1$ a $y = 2$, tak $\langle 1, 2\rangle \in R$, ale $\langle 2, 1\rangle \notin R$, pričom $1, 2 \in A$. Relácia R má byť reflexívna, takže musí platiť $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \in R$. Ak (napríklad) $A = \{1, 2\}$, vyjadrili sme sa ku každej dvojici z $A \times A$. Zhrnutím teda

  $$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

  (i keď sme zatiaľ vôbec neuvažovali o tranzitivite).

  Overíme, že R spĺňa všetky požadované podmienky:

  - Keďže $A = \{1, 2\}$ a $\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \in R$, relácia R je naozaj reflexívna (na množine A).
  - Podmienka tranzitivity $(((\langle x, y\rangle \in R) \land (\langle y, z\rangle \in R)) \rightarrow (\langle x, z\rangle \in R))$ je v prípadoch $x = y$ a $y = z$ splnená automaticky, overovať má preto význam len tie prípady, keď $x \neq y \neq z$. Overme ich teda:
    - Tvrdenie $((\langle 1, 2\rangle \in R) \land (\langle 2, 1\rangle \in R)) \rightarrow (\langle 1, 1\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho záver.

    - Tvrdenie $((\langle 2,1\rangle \in R) \wedge (\langle 1,2\rangle \in R)) \to (\langle 2,2\rangle \in R)$ platí, lebo platí jeho záver.
  - Keďže $\langle 1,2\rangle \in R$, ale $\langle 2,1\rangle \notin R$, relácia R nie je symetrická.

- **Zadanie:**

  Nájdite príklad relácie, ktorá je reflexívna (na príslušnej množine) a antisymetrická, ale nie je tranzitívna.

  Riešenie:

  Ak chceme, aby naša relácia nebola tranzitívna, musia existovať tri objekty x, y a z také, že dvojice $\langle x,y\rangle$ a $\langle y,z\rangle$ do nej patria, ale $\langle x,z\rangle$ nie. Ak je to relácia R na množine A, a ak (napríklad) $x = 1$, $y = 2$ a $z = 3$, tak $\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle \in R$, ale $\langle 1,3\rangle \notin R$, pričom $1,2,3 \in A$. Relácia R má byť antisymetrická, takže potom platí tak $\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle \notin R$. Relácia R má byť aj reflexívna, takže musí platiť $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle \in R$. Ak (napríklad) $A = \{1,2,3\}$, vyjadrili sme sa ku každej dvojici z $A \times A$ okrem $\langle 3,1\rangle$. Nech (napríklad)

  $$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\},$$

  overíme, že R spĺňa všetky požadované podmienky:

  - Keďže $A = \{1,2,3\}$ a $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle \in R$, relácia R je naozaj reflexívna (na množine A).
  - Podmienka antisymetrie $(((\langle x,y\rangle \in R) \wedge (\langle y,x\rangle \in R)) \to (x = y))$ je v prípade $x = y$ splnená automaticky, overovať má preto význam len tie prípady, keď $x \neq y$. Ľahko však vidieť, že predpoklad podmienky $((\langle x,y\rangle \in R) \wedge (\langle y,x\rangle \in R))$ nie je splnený, pre žiadnu takú dvojicu $\langle x,y\rangle$, tvrdenie je vtedy preto splnené triviálne.

Domáce úlohy

---

1 Nájdite príklad relácie, ktorá je antisymetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna (na príslušnej množine).

2 Nájdite príklad relácie, ktorá je tranzitívna a reflexívna (na príslušnej množine), ale nie je antisymetrická.

3 Nájdite príklad relácie, ktorá je symetrická a antisymetrická, ale nie je tranzitívna.

4 Nájdite príklad relácie, ktorá nie je ani symetrická, ani antisymetrická a ani tranzitívna.

5 Nájdite príklad relácie, ktorá je symetrická a antisymetrická, ale nie je reflexívna ani tranzitívna.
