# ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

## 4. cvičenie

- **Zadanie:**

  Nech pre každé reálne číslo $x$ také, že $x \geq 1$, platí $A_x = (1 - \frac{1}{x}, x)$. Určte $\bigcup_{x \in I} A_x$ a $\bigcap_{x \in I} A_x$, ak platí:

  **1** $I = \{1\}$;

  **2** $I = \{\frac{5}{2}\}$;

  **3** $I = \{2, 5\}$;

  **4** $I = \{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$;

  **5** $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

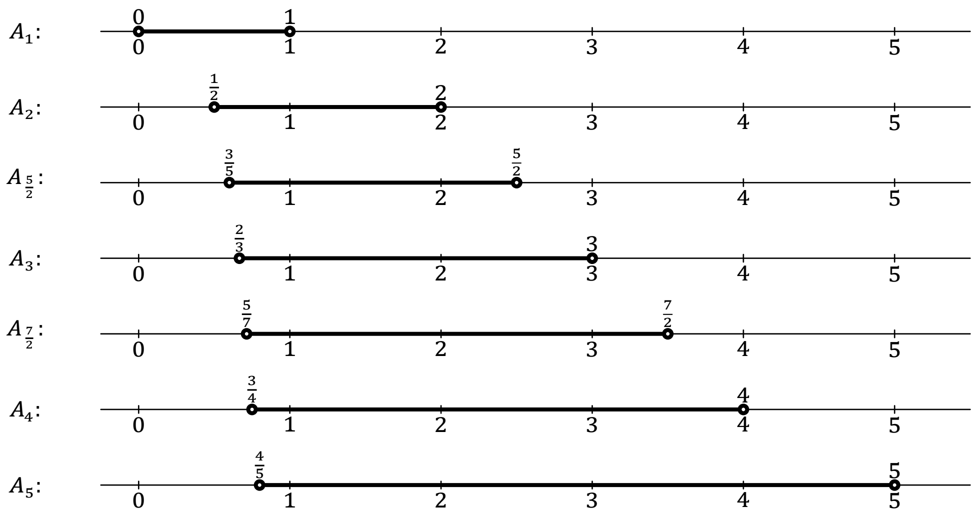
  **6** $I = \{1, \dots, n\}$, kde $n$ je kladné prirodzené číslo.

  **7** $I = \mathbb{N}^+$;

  **8** $I = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$.

  **Riešenie:**

  Najprv načrtnime niektoré z množín tohto systému:




  Po takomto získaní náhľadu určme jednotlivé hodnoty:

  **1** $\bigcup_{x \in I} A_x = \bigcap_{x \in I} A_x = A_1 = (0, 1)$.

  **2** $\bigcup_{x \in I} A_x = \bigcap_{x \in I} A_x = A_{\frac{5}{2}} = (1 - \frac{1}{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}) = (\frac{3}{5}, \frac{5}{2})$.

  **3**
  - $\bigcup_{x \in I} A_x = A_2 \cup A_5 = (\frac{1}{2}, 2) \cup (\frac{4}{5}, 5) = (\frac{1}{2}, 5)$.
  - $\bigcap_{x \in I} A_x = A_2 \cap A_5 = (\frac{1}{2}, 2) \cap (\frac{4}{5}, 5) = (\frac{4}{5}, 2)$.

  **4**
  - $\bigcup_{x \in I} A_x = A_{\frac{5}{2}} \cup A_{\frac{7}{2}} = (1 - \frac{1}{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}) \cup (1 - \frac{1}{\frac{7}{2}}, \frac{7}{2}) = (\frac{3}{5}, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{7}, \frac{7}{2}) = (\frac{3}{5}, \frac{7}{2})$.
  - $\bigcap_{x \in I} A_x = A_2 \cap A_5 = (1 - \frac{1}{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}) \cap (1 - \frac{1}{\frac{7}{2}}, \frac{7}{2}) = (\frac{3}{5}, \frac{5}{2}) \cap (\frac{5}{7}, \frac{7}{2}) = (\frac{5}{7}, \frac{5}{2})$.

  **5**
  - $\bigcup_{x \in I} A_x = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = (0, 1) \cup (\frac{1}{2}, 2) \cup (\frac{2}{3}, 3) \cup (\frac{3}{4}, 4) \cup (\frac{4}{5}, 5) = (0, 5)$.
  - $\bigcap_{x \in I} A_x = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = (0, 1) \cap (\frac{1}{2}, 2) \cap (\frac{2}{3}, 3) \cap (\frac{3}{4}, 4) \cap (\frac{4}{5}, 5) = (\frac{4}{5}, 1)$.

  **6**
  - $\bigcup_{x \in I} A_x = A_1 \cup \ldots \cup A_n = (0, 1) \cup \ldots \cup (1 - \frac{1}{n}, n) = (0, 1) \cup \ldots \cup (\frac{n-1}{n}, n) = (\min\{0, \dots, \frac{n-1}{n}\}, \max\{1, \dots, n\}) = (0, n)$.
  - $\bigcap_{x \in I} A_x = A_1 \cap \ldots \cap A_n = (0, 1) \cap \ldots \cap (1 - \frac{1}{n}, n) = (0, 1) \cap \ldots \cap (\frac{n-1}{n}, n) = (\max\{0, \dots, \frac{n-1}{n}\}, \min\{1, \dots, n\}) = (\frac{n-1}{n}, 1)$.

  **7**
  - $\bigcup_{x \in I} A_x = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = (0, 1) \cup (\frac{1}{2}, 2) \cup (\frac{2}{3}, 3) \cup \cdots = (0, \lim_{n \to \infty} n) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$.

- $\bigcap_{x\in I} A_x = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ = (0,1) \cap (\frac{1}{2}, 2) \cap (\frac{2}{3}, 3) \cap \cdots = (\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}, 1) = (1,1) = \emptyset$.

8 - $\bigcup_{x\in I} A_x$ je nadmnožinou $\bigcup_{x\in\mathbb{N}^+} A_x$ z predchádzajúcej podúlohy, takže $\mathbb{R}^+ \subseteq \bigcup_{x\in I} A_x$. Opačná inklúzia vyplýva z definície množín systému takže $\bigcup_{x\in I} A_x = \mathbb{R}^+$.
- $\bigcap_{x\in I} A_x$ je poddmnožinou $\bigcap_{x\in\mathbb{N}^+} A_x$ z predchádzajúcej podúlohy, takže $\bigcap_{x\in I} A_x = \emptyset$.

---

- **Zadanie:**

Zistite, či pre každú neprázdnu množinu $I$ a systémy množín $\{K_i : i \in I\}$ a $\{L_i : i \in I\}$ platia inklúzie medzi množinami

$$\bigcap_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i \quad \text{a} \quad \bigcap_{i\in I} (K_i \setminus L_i).$$

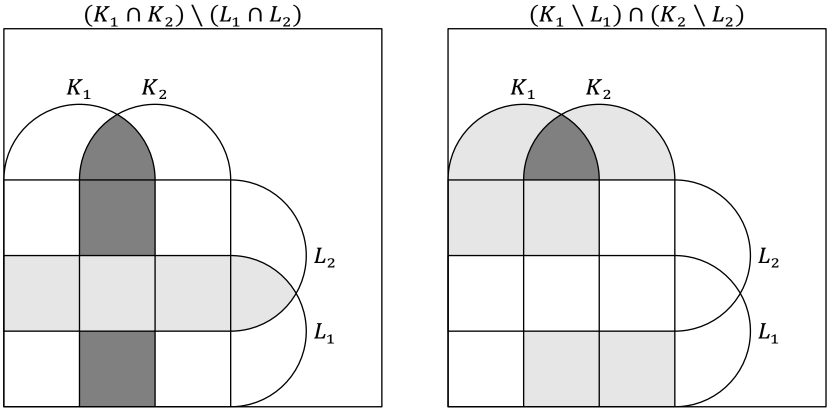
**Riešenie:**

Najprv rozoberme prípad $I = \{1, 2\}$:

- $\bigcap_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i = (K_1 \cap K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$,
- $\bigcap_{i\in I} (K_i \setminus L_i) = (K_1 \setminus L_1) \cap (K_2 \setminus L_2)$.

Načrtnime obrázky:

$(K_1 \cap K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$ $\qquad$ $(K_1 \setminus L_1) \cap (K_2 \setminus L_2)$




Obrázky naznačujú, že inklúzia $\bigcap_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i \supseteq \bigcap_{i\in I}(K_i \setminus L_i)$ bude platiť vždy, ale opačná nie. Dokážeme obe tvrdenia:

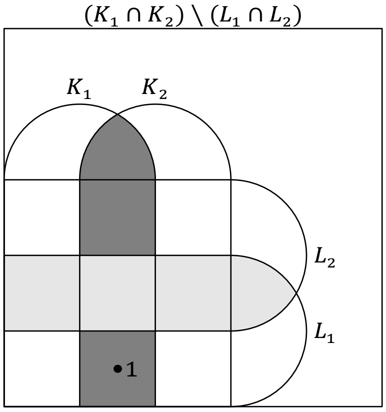
$\boxed{\supseteq}$ Pre ľubovoľné $x$ platí:
$x \in \bigcap_{i\in I}(K_i \setminus L_i)$,
akk $(\forall i \in I) x \in (K_i \setminus L_i)$
(definícia prieniku systému množín),
akk $(\forall i \in I)((x \in K_i) \wedge \neg(x \in L_i))$
(definícia rozdielu),
akk $(\forall i \in I)(x \in K_i) \wedge (\forall i \in I)\neg(x \in L_i)$
(dvoma spôsobmi sme vyjadrili, že pre každé $i$ platí ako jeden, tak druhý príslušný výrok),
ztv $(\forall i \in I)(x \in K_i) \wedge (\exists i \in I)\neg(x \in L_i)$
(ak niečo platí pre všetky $i$, platí aj pre jedno z nich),
akk $(\forall i \in I)(x \in K_i) \wedge \neg(\forall i \in I)(x \in L_i)$
(lebo výroky $(\exists i \in I)\neg\varphi$ a $\neg(\forall i \in I)\varphi$ sú ekvivalentné),
akk $(x \in \bigcap_{i\in I} K_i) \wedge \neg(x \in \bigcap_{i\in I} L_i)$
(definícia prieniku systému množín),
akk $x \in \bigcap_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$
(definícia rozdielu).

Ukázali sme, že z tvrdenia $x \in \bigcap_{i\in I}(K_i \setminus L_i)$ vyplýva tvrdenie $x \in \bigcap_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$, teda každý prvok množiny $x \in \bigcap_{i\in I}(K_i \setminus L_i)$ je prvkom množiny $x \in \bigcap_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i$, čiže platí $\bigcap_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i \supseteq \bigcap_{i\in I}(K_i \setminus L_i)$.

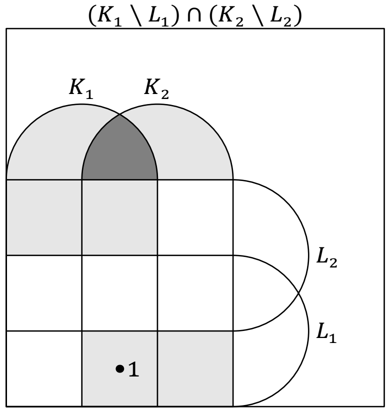
$\boxed{\not\subseteq}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázku:

$(K_1 \cap K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$ $\qquad$ $(K_1 \setminus L_1) \cap (K_2 \setminus L_2)$

$(K_1 \cap K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$




$(K_1 \setminus L_1) \cap (K_2 \setminus L_2)$




Zvoľme teda $I = \{1, 2\}$ a $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{1\}$, $L_1 = \{1\}$, $L_2 = \emptyset$. Potom platí:

- $\bigcap_{i \in I} K_i \setminus \bigcap_{i \in I} L_i$
  $= (K_1 \cap K_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$
  $= (\{1\} \cap \{1\}) \setminus (\{1\} \cap \emptyset)$
  $= \{1\} \setminus \emptyset$
  $= \{1\}$,
- $\bigcap_{i \in I} (K_i \setminus L_i)$
  $= (K_1 \setminus L_1) \cap (K_2 \setminus L_2)$
  $= (\{1\} \setminus \{1\}) \cap (\{1\} \setminus \emptyset)$
  $= \emptyset \cap \{1\}$
  $= \emptyset$.

Inklúzia $\bigcap_{i \in I} K_i \setminus \bigcap_{i \in I} L_i \subseteq \bigcap_{i \in I} (K_i \setminus L_i)$ teda neplatí vždy.

---

- **Zadanie:**

  Zistite, či pre každé neprázdne množiny $I$ a $J$ a systém množín $\{K_{i,j} \;:\; \langle i, j \rangle \in I \times J\}$ platia inklúzie medzi množinami
  $$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} K_{i,j} \quad \text{a} \quad \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} K_{i,j}.$$

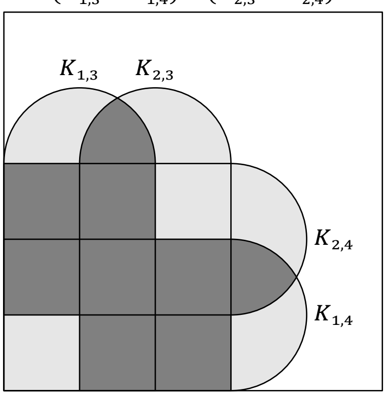
  **Riešenie:**

  Najprv rozoberme prípad $I = \{1, 2\}$ a $J = \{3, 4\}$:

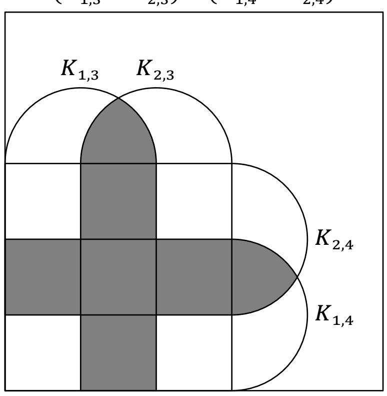
  - $\bigcap_{i \in \{1,2\}} \bigcup_{j \in \{3,4\}} K_{i,j} = \bigcap_{i \in \{1,2\}} (K_{i,3} \cup K_{i,4}) = (K_{1,3} \cup K_{1,4}) \cap (K_{2,3} \cup K_{2,4})$,
  - $\bigcup_{j \in \{3,4\}} \bigcap_{i \in \{1,2\}} K_{i,j} = \bigcup_{j \in \{3,4\}} (K_{1,j} \cap K_{2,j}) = (K_{1,3} \cap K_{2,3}) \cup (K_{1,4} \cap K_{2,4})$.

  Načrtnime obrázky:

  $(K_{1,3} \cup K_{1,4}) \cap (K_{2,3} \cup K_{2,4})$

  $(K_{1,3} \cap K_{2,3}) \cup (K_{1,4} \cap K_{2,4})$

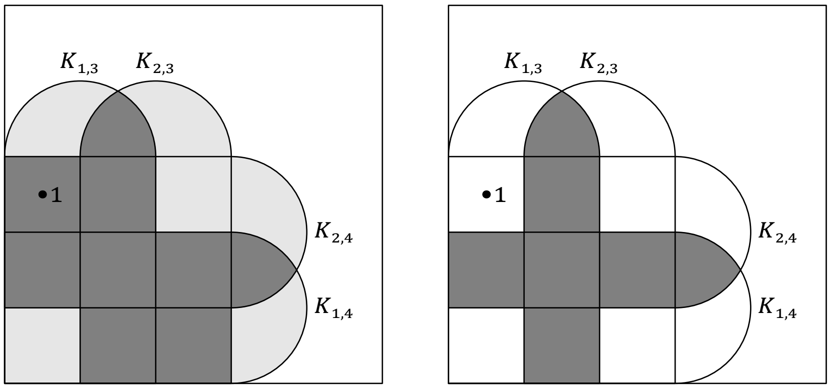
  Obrázky naznačujú, že inklúzia $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} K_{i,j} \supseteq \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} K_{i,j}$ asi bude platiť vždy, ale opačná nie. Dokážeme obe tvrdenia:

$\boxed{\supseteq}$ Pre ľubovoľné $x$ platí:
$x \in \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} K_{i,j}$,
akk $(\exists j \in J) x \in \bigcap_{i\in I} K_{i,j}$
(definícia zjednotenia systému množín),
akk $(\exists j \in J)(\forall i \in I) x \in K_{i,j}$
(definícia prieniku systému množín),
ztv $(\forall i \in I)(\exists j \in J) x \in K_{i,j}$
(ak existuje univerzálne $j$ vyhovujúce všetkým $i \in I$, môžeme ho vziať pre každé z nich;
(naopak toto tvrdenie neplatí, univerzálne $j$ nemusí existovať)),
akk $(\forall i \in I) x \in \bigcup_{j\in J} K_{i,j}$
(definícia zjednotenia systému množín),
akk $x \in \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} K_{i,j}$
(definícia prieniku systému množín).

Ukázali sme, že z $x \in \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} K_{i,j}$ vyplýva $x \in \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} K_{i,j}$, čiže inklúzia $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} K_{i,j} \supseteq \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} K_{i,j}$ platí vždy.

$\boxed{\not\subseteq}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázku:

$(K_{1,3} \cup K_{1,4}) \cap (K_{2,3} \cup K_{2,4})$ $\quad$ $(K_{1,3} \cap K_{2,3}) \cup (K_{1,4} \cap K_{2,4})$




Zvoľme teda $I = \{1, 2\}$, $J = \{3, 4\}$, $K_{1,3} = \{1\}$, $K_{1,4} = \emptyset$, $K_{2,3} = \emptyset$, $K_{2,4} = \{1\}$. Potom platí:

- $\bigcap_{i\in\{1,2\}} \bigcup_{j\in\{3,4\}} K_{i,j} = (K_{1,3} \cup K_{1,4}) \cap (K_{2,3} \cup K_{2,4}) = (\{1\} \cup \emptyset) \cap (\emptyset \cup \{1\}) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$,
- $\bigcup_{j\in\{3,4\}} \bigcap_{i\in\{1,2\}} K_{i,j} = (K_{1,3} \cap K_{2,3}) \cup (K_{1,4} \cap K_{2,4}) = (\{1\} \cap \emptyset) \cup (\emptyset \cap \{1\}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Inklúzia $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} K_{i,j} \subseteq \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} K_{i,j}$ teda neplatí vždy.

---

# Domáce úlohy

---

**1** Nech pre každé reálne číslo $x$ také, že $x \geq 1$, platí $A_x = (1 - x, 1 + \frac{1}{x})$. Určte $\bigcup_{x\in I} A_x$ a $\bigcap_{x\in I} A_x$, ak platí:

**1** $I = \{1\}$;

**2** $I = \{\frac{5}{2}\}$;

**3** $I = \{2, 5\}$;

**4** $I = \{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$;

**5** $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

**6** $I = \{1, \dots, n\}$, kde $n$ je kladné prirodzené číslo.

**7** $I = \mathbb{N}^+$;

**8** $I = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$.

**2** Ak $I$ je neprázdna množina a pre každé $i$ z $I$ sú $K_i$ a $L_i$ množiny, rozhodnite, ktoré z inklúzií medzi množinami

$$\bigcap_{i\in I} K_i \cup \bigcap_{i\in I} L_i \quad \text{a} \quad \bigcap_{i\in I} (K_i \cup L_i)$$

platia.

**3** Ak $I$ a $J$ sú neprázdne množiny a pre každé $i$ z $I$ je $K_{i,j}$ množina, rozhodnite, ktoré z inklúzií medzi množinami

$$\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} K_{i,j} \quad \text{a} \quad \bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I} K_{i,j}$$

platia.

**4** Ak $I$ je neprázdna množina a pre každé $i$ z $I$ sú $K_i$ a $L_i$ množiny, rozhodnite, ktoré z inklúzií medzi množinami

$$\bigcup_{i\in I} K_i \setminus \bigcap_{i\in I} L_i \quad \text{a} \quad \bigcup_{i\in I}(K_i \setminus L_i)$$

platia.

**5** Ak $I$ je neprázdna množina a pre každé $i$ z $I$ sú $K_i$ a $L_i$ množiny, rozhodnite, ktoré z inklúzií medzi množinami

$$\bigcup_{i\in I} K_i \times \bigcup_{i\in I} L_i \quad \text{a} \quad \bigcup_{i\in I}(K_i \times L_i)$$

platia.