ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

3. cvičenie

- **Zadanie:**

  Nech $K = \{1, 2, 3\}$, $L = \{2, 3, 4\}$ a $M = \{4, 5\}$. Vypočítajte:

  1. $K \cap L$.
  2. $K \cup L$.
  3. $K \cap M$.
  4. $K \setminus L$.
  5. $L \setminus K$.
  6. $(K \cup L) \setminus M$.
  7. $L \setminus (K \setminus M)$.
  8. $(L \setminus K) \setminus M$.

  Riešenie:

  1. $K \cap L = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.
  2. $K \cup L = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
  3. $K \cap M = \{1, 2, 3\} \cap \{4, 5\} = \emptyset$.
  4. $K \setminus L = \{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$.
  5. $L \setminus K = \{2, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4\}$.
  6. $(K \cup L) \setminus M = (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}) \setminus \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{4, 5\} = \{1, 2, 3\}$.
  7. $L \setminus (K \setminus M) = \{2, 3, 4\} \setminus (\{1, 2, 3\} \setminus \{4, 5\}) = \{2, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4\}$.
  8. $(L \setminus K) \setminus M = (\{2, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\}) \setminus \{4, 5\} = \{4\} \setminus \{4, 5\} = \emptyset$.

- **Zadanie:**

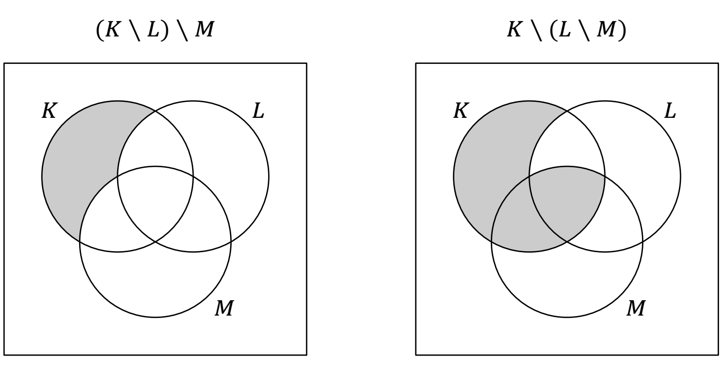
  Zistite, či je rozdiel množín asociatívny, t. j. či pre každú trojicu množín K, L a M platí

  $$(K \setminus L) \setminus M = K \setminus (L \setminus M).$$

  Ak rovnosť neplatí, platí aspoň niektorá z inklúzií?

  Riešenie:

  Najprv načrtneme obrázky:



  Obrázky naznačujú, že inklúzia $(K \setminus L) \setminus M \subseteq K \setminus (L \setminus M)$ bude platiť pre ľubovoľné K, L a M, ale inklúzia $(K \setminus L) \setminus M \supseteq K \setminus (L \setminus M)$ zrejme nie.

  Dokážeme obe tvrdenia:

$\boxed{\subseteq}$ Pre ľubovoľné x platí:
$x \in ((K \setminus L) \setminus M)$,
akk $(x \in K \setminus L) \wedge \neg(x \in M)$
(definícia rozdielu),
akk $((x \in K) \wedge \neg(x \in L)) \wedge \neg(x \in M)$
(definícia rozdielu),
ztv $(x \in K) \wedge \neg((x \in L) \wedge \neg(x \in M))$
(lebo výrok $(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg\xi$ implikuje výrok $\varphi \wedge \neg(\psi \wedge \neg\xi)$ (dôkaz je nižšie)),
akk $(x \in K) \wedge \neg(x \in (L \setminus M))$
(definícia rozdielu),
akk $x \in (K \setminus (L \setminus M))$
(definícia rozdielu).

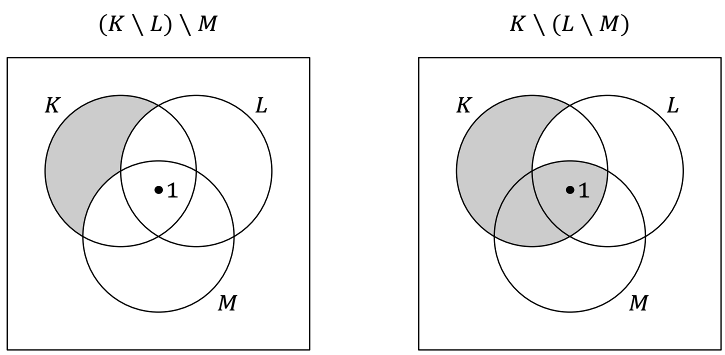
Ostáva ešte dokázať, že výrok $(\varphi\wedge\neg\psi)\wedge\neg\xi$ implikuje výrok $\varphi\wedge\neg(\psi\wedge\neg\xi)$. Rozoberieme všetky možnosti pravdivosti výrokov φ, ψ a ξ:

φ	ψ	ξ	$\neg\psi$	$\varphi \wedge \neg\psi$	$\neg\xi$	$(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg\xi$	$\psi \wedge \neg\xi$	$\neg(\psi \wedge \neg\xi)$	$\varphi \wedge \neg(\psi \wedge \neg\xi)$
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

Hodnota v stĺpci prislúchajúcom výroku $(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg\xi$ v žiadnom riadku nepresahuje hodnotu v stĺpci prislúchajúcom výroku $\varphi \wedge \neg(\psi \wedge \neg\xi)$, z prvého teda vyplýva druhý pre každú voľbu φ, ψ a ξ.

Ukázali sme, že z tvrdenia $x \in ((K \setminus L) \setminus M)$ vyplýva tvrdenie $x \in (K \setminus (L \setminus M))$, teda každý prvok množiny $(K \setminus L) \setminus M$ je prvkom množiny $K \setminus (L \setminus M)$, čiže platí $(K \setminus L) \setminus M \subseteq K \setminus (L \setminus M)$, a to pre každú trojicu množín K, L a M.

$\boxed{\not\supseteq}$ Nájdeme kontrapríklad pomocou obrázka:



Zvoľme teda $K = L = M = \{1\}$. Potom platí:

- $(K \setminus L) \setminus M = (\{1\} \setminus \{1\}) \setminus \{1\} = \emptyset \setminus \{1\} = \emptyset$,
- $K \setminus (L \setminus M) = \{1\} \setminus (\{1\} \setminus \{1\}) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$.

Inklúzia $(K \setminus L) \setminus M \supseteq K \setminus (L \setminus M)$ teda neplatí pre každú trojicu množín K, L a M. Rozdiel množín preto nie je asociatívny.

- **Zadanie:**

  Označme podmnožiny množiny konvexných štvoruholníkov v danej rovine takto:

  - S je množina všetkých štvorcov.
  - O je množina všetkých obdĺžnikov.
  - K je množina všetkých kosoštvorcov.
  - R je množina všetkých rovnobežníkov.
  - D je množina všetkých deltoidov.

- L je množina všetkých lichobežníkov.

Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení:

1. $O \cap K = S$.
2. $O \cap D = S$.
3. $D \cap K = S$.
4. $D \cap R = K$.
5. $D \cap L = K$.

Riešenie:

1. Ukážeme obe inklúzie:
   - $\supseteq$ Nech x je prvok množiny S, je teda štvorec. Každý štvorec je špeciálnym prípadom obdĺžnika, takže x je prvkom O. Podobne každý štvorec je špeciálnym prípadom kosoštvorca, takže x je aj prvkom K. Štvorec x je teda spoločným prvkom množín O a K, takže je prvkom ich prieniku $O \cap K$.

     Ukázali sme teda, že každý prvok množiny S je aj prvkom množiny $O \cap K$. To znamená, že platí inklúzia $O \cap K \supseteq S$.
   - $\subseteq$ Štvoruholník, ktorý patrí do množiny $O \cap K$, patrí ako do O, tak do K. Je teda ako obdĺžnik, tak kosoštvorec, takže má zároveň všetky uhly pravé a všetky strany rovnako dlhé. Musí to teda byť štvorec čiže prvok množiny S.

     Každý prvok množiny $O \cap K$ je teda aj prvkom S, čo znamená, že platí inklúzia $O \cap K \subseteq S$.

   Keďže platia obe inklúzie, platí aj rovnosť $O \cap K = S$.
2. Ukážeme obe inklúzie:
   - $\supseteq$ Nech x je prvok množiny S, je teda štvorec. Každý štvorec je špeciálnym prípadom obdĺžnika, takže x je prvkom O. Podobne každý štvorec je špeciálnym prípadom deltoidu, takže x je aj prvkom D. Štvorec x je teda spoločným prvkom množín O a D, takže je prvkom ich prieniku $O \cap D$.

     Ukázali sme teda, že každý prvok množiny S je aj prvkom množiny $O \cap D$. To znamená, že platí inklúzia $O \cap D \supseteq S$.
   - $\subseteq$ Štvoruholník, ktorý patrí do množiny $O \cap D$, patrí ako do O, tak do D. Je teda ako obdĺžnik, tak deltoid, takže jeho má zároveň všetky uhly pravé, jeho protiľahlé strany sú rovnako dlhé a dve dvojice susedných strán rovnako dlhé. To však znamená, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé a zároveň všetky jeho vnútorné uhly sú pravé. Musí to teda byť štvorec čiže prvok množiny S.

     Každý prvok množiny $O \cap D$ je teda aj prvkom množiny S, čo znamená, že platí inklúzia $O \cap D \subseteq S$.

   Keďže platia obe inklúzie, platí aj rovnosť $O \cap D = S$.
3. Ako už vieme, platí $K \subseteq D$. To však znamená, že $D \cap K = K$, máme teda rozhodnúť o platnosti vzťahu $K = S$. Ľahko však vidieť, že existuje kosoštvorec, ktorý nie je štvorcom. Tento kontrapríklad ukazuje, že uvedená rovnosť neplatí.
4. Ukážeme obe inklúzie:
   - $\supseteq$ Nech x je prvok množiny K, je teda kosoštvorec. Každý kosoštvorec je špeciálnym prípadom deltoidu, takže x je prvkom D. Podobne každý kosoštvorec je špeciálnym prípadom rovnobežníka, takže x je aj prvkom R. Kosoštvorec x je teda spoločným prvkom množín D a R, je teda prvkom ich prieniku $D \cap R$.

     Ukázali sme teda, že každý prvok množiny K je aj prvkom množiny $D \cap R$. To znamená, že platí inklúzia $D \cap R \supseteq K$.
   - $\subseteq$ Štvoruholník, ktorý patrí do množiny $D \cap R$, patrí ako do D, tak do R. Je teda ako deltoid, tak rovnobežník, takže jeho protiľahlé strany sú rovnako dlhé a dve dvojice susedných strán rovnako dlhé. To však znamená, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé. Musí to teda byť kosoštvorec, teda prvok množiny K.

     Každý prvok množiny $D \cap R$ je teda aj prvkom množiny K, čo znamená, že platí inklúzia $D \cap R \subseteq K$.

   Keďže platia obe inklúzie, platí aj rovnosť $D \cap R = K$.
5. Ukážeme obe inklúzie:

⊇ Nech x je prvok množiny K, je teda kosoštvorec. Každý kosoštvorec je špeciálnym prípadom deltoidu, takže x je prvkom D. Podobne každý kosoštvorec je špeciálnym prípadom lichobežníka, takže x je aj prvkom L. Kosoštvorec x je teda spoločným prvkom množín D a L, je teda prvkom ich prieniku $D \cap L$.

Ukázali sme teda, že každý prvok množiny K je aj prvkom množiny $D \cap L$. To znamená, že platí inklúzia $D \cap R \supseteq L$.

⊆ Štvoruholník, ktorý patrí do množiny $D \cap L$, patrí ako do D, tak do L. Je teda ako deltoid, tak lichobežník, takže je súmerný podľa jednej zo svojich uhlopriečok, dve susedné strany sú rovnako dlhé a dve jeho protiľahlé strany sú rovnobežné. Zo spomínanej súmernosti však potom musia byť rovnobežné aj druhé dve protiľahlé strany, ide teda o rovnobežník. Keďže navyše sú niektoré dve susedné strany rovnako dlhé, ide o kosoštvorec, teda prvok množiny K.

Každý prvok množiny $D \cap L$ je teda aj prvkom množiny K, čo znamená, že platí inklúzia $D \cap L \subseteq K$.

Keďže platia obe inklúzie, platí aj rovnosť $D \cap L = K$.

Domáce úlohy

---

1 Nech $K = \{1, 2, 3\}$, $L = \{2, 3, 4\}$ a $M = \{1, 4, 5\}$. Vypočítajte

$$((L \cup (K \setminus M)) \cup ((L \setminus K) \cup M)) \setminus ((L \cup (K \setminus M)) \cap ((L \setminus K) \cup M)).$$

2 Zistite, či pre každú trojicu množín K, L a M platí

$$K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap M.$$

Ak rovnosť neplatí, platí aspoň niektorá z inklúzií?

3 Zistite, či pre každú trojicu množín K, L a M platí

$$K \setminus (L \cap M) = (K \setminus L) \cap (K \setminus M).$$

Ak rovnosť neplatí, platí aspoň niektorá z inklúzií?

4 Zistite, či pre každú trojicu množín K, L a M platí

$$K \cup (L \cap M) = (K \cap L) \cup M.$$

Ak rovnosť neplatí, platí aspoň niektorá z inklúzií?

5 Označme podmnožiny množiny konvexných štvoruholníkov v danej rovine takto:

- S je množina všetkých štvorcov.
- O je množina všetkých obdĺžnikov.
- K je množina všetkých kosoštvorcov.
- R je množina všetkých rovnobežníkov.
- D je množina všetkých deltoidov.
- L je množina všetkých lichobežníkov.

Zistite, ktorá z inklúzií medzi množinami $(O \cup K) \setminus S$ a $(R \cup D) \cap L$ platia.
