# ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

## 2. cvičenie

- **Zadanie:**

  Zistite, či je konjukcia voči disjunkcii distributívna.

  **Riešenie:**

  Máme teda zistiť, či pre všetky výroky $\varphi$, $\psi$ a $\xi$ sú výroky $\varphi \wedge (\psi \vee \xi)$ a $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi)$ ekvivalentné.

  Rozoberieme všetky možnosti pravdivosti výrokov $\varphi$, $\psi$ a $\xi$:

| $\varphi$ | $\psi$ | $\xi$ | $\psi \vee \xi$ | $\varphi \wedge (\psi \vee \xi)$ | $\varphi \wedge \psi$ | $\varphi \wedge \xi$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

  Stĺpce prislúchajúce výrokom $\varphi \wedge (\psi \vee \xi)$ a $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi)$ sú zhodné, tieto výroky preto sú ekvivalentné pre každú voľbu $\varphi$, $\psi$ a $\xi$.

  Konjukcia teda je voči disjunkcii distributívna.

---

- **Zadanie:**

  Nech $\varphi$, $\psi$ a $\xi$ sú výroky. Zistite, ktoré z implikácií medzi výrokmi $(\varphi \to \psi) \to \xi$ a $\varphi \to (\psi \to \xi)$ platia a ktoré nie.

  **Riešenie:**

  Rozoberieme všetky možnosti pravdivosti výrokov $\varphi$, $\psi$ a $\xi$:

| $\varphi$ | $\psi$ | $\xi$ | $\varphi \to \psi$ | $(\varphi \to \psi) \to \xi$ | $\psi \to \xi$ | $\varphi \to (\psi \to \xi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

  Keďže všetky hodnoty stĺpca výroku $(\varphi \to \psi) \to \xi$ sú najviac také ako prislúchajúce hodnoty stĺpca výroku $\varphi \to (\psi \to \xi)$, z prvého vyplýva druhý.

  Keďže však existuje aspoň jeden riadok (a to prvý a tretí), v ktorom je hodnota prvého výroku menšia ako hodnota druhého, z druhého nevyplýva prvý pre každú voľbu $\varphi$, $\psi$ a $\xi$.

  Ako kontrapríklad stačí vziať výroky:

  $\varphi: 1 = 2$

  $\psi: 1 = 2$

  $\xi: 1 = 2$

V takom prípade je totiž výrok $(\varphi \to \psi) \to \xi$ (t. j. $((1 = 2) \to (1 = 2)) \to (1 = 2))$ nepravdivý, ale výrok $\varphi \to (\psi \to \xi)$ (t. j. $(1 = 2) \to ((1 = 2) \to (1 = 2)))$ pravdivý.

Ako dôsledok dostávame, že implikácia nie je asociatívna.

---

- **Zadanie:**

  Zistite, ktoré implikácie medzi nasledujúcimi výrokmi platia pre ľubovoľné výroky $\varphi$ a $\psi$:

  - $\exists x(\varphi \lor \psi)$ a $\exists x\varphi \lor \exists x\psi$;
  - $\forall x(\varphi \lor \psi)$ a $\forall x\varphi \lor \forall x\psi$.

  **Riešenie:**

  - Dokážeme platnosť oboch implikácií:
    - Ak existuje $x$ také, že platí $\varphi \lor \psi$, tak preň platí $\varphi$ alebo $\psi$. V prvom prípade teda existuje $x$ (konkrétne toto) také, že platí $\varphi$, alebo existuje $x$ (konkrétne toto) také, že platí $\psi$. Platí teda $\exists x\varphi$ alebo $\exists x\psi$, a teda aj $\exists x\varphi \lor \exists x\psi$.
    - Výrok $\exists x\varphi \lor \exists x\psi$ znamená, že platí $\exists x\varphi$ alebo $\exists x\psi$. Rozoberme oba prípady:
      - Výrok $\exists x\varphi$ znamená, že existuje $x$ také, že platí $\varphi$. Potom však existuje $x$ (konkrétne toto) také, že platí $\varphi$ alebo $\psi$, čiže platí výrok $\exists x(\varphi \lor \psi)$.
      - Výrok $\exists x\psi$ znamená, že existuje $x$ také, že platí $\psi$. Potom však existuje $x$ (konkrétne toto) také, že platí $\varphi$ alebo $\psi$, čiže platí výrok $\exists x(\varphi \lor \psi)$.

      V oboch prípadoch sme dokázali, že platí $\exists x(\varphi \lor \psi)$.
  - Dokážeme, že z druhého vyplýva prvý, ale nie naopak:
    - Výrok $\forall x\varphi \lor \forall x\psi$ znamená, že platí $\forall x\varphi$ alebo $\forall x\psi$. Rozoberme oba prípady:
      - Výrok $\forall x\varphi$ znamená, že pre každé $x$ platí $\varphi$. Potom však pre každé $x$ platí $\varphi$ alebo $\psi$, čiže platí výrok $\forall x(\varphi \lor \psi)$.
      - Výrok $\forall x\psi$ znamená, že pre každé $x$ platí $\psi$. Potom však pre každé $x$ platí $\varphi$ alebo $\psi$, čiže platí výrok $\forall x(\varphi \lor \psi)$.

      V oboch prípadoch sme dokázali, že platí $\forall x(\varphi \lor \psi)$.
    - Nech $\varphi$ je výrok $x = 0$ a $\psi$ výrok $x \neq 0$. Potom výrok $\forall x(\varphi \lor \psi)$ čiže $\forall x(x = 0 \lor x \neq 0)$ je pravdivý, ale výrok $\forall x\varphi \lor \forall x\psi$ čiže $\forall x(x = 0) \lor \forall x(x \neq 0)$ je nepravdivý. Výroky teda nie sú pre túto voľbu $\varphi$ a $\psi$ ekvivalentné.

---

- **Zadanie:**

  Zistite, či sú nasledujúce výroky ekvivalentné pre ľubovoľné výroky $\varphi$ a $\psi$, pričom $\psi$ nemá parameter $x$:

  - $\forall x(\varphi \to \psi)$ a $\forall x\varphi \to \psi$;
  - $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$ a $\forall x\varphi \leftrightarrow \psi$.

  **Riešenie:**

  - Nech $\varphi$ je výrok $x = 0$ a $\psi$ výrok $1 = 0$. Potom výrok $\forall x(\varphi \to \psi)$ čiže $\forall x(x = 0 \to 1 = 0)$ je nepravdivý, ale výrok $\forall x\varphi \to \psi$ čiže $\forall x(x = 0) \to 1 = 0$ je pravdivý. Výroky teda nie sú pre túto voľbu $\varphi$ a $\psi$ ekvivalentné.
  - Nech $\varphi$ je výrok $x = 0$ a $\psi$ výrok $1 = 0$. Potom výrok $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$ čiže $\forall x(x = 0 \leftrightarrow 1 = 0)$ je nepravdivý, ale výrok $\forall x\varphi \leftrightarrow \psi$ čiže $\forall x(x = 0) \leftrightarrow 1 = 0$ je pravdivý. Výroky teda nie sú pre túto voľbu $\varphi$ a $\psi$ ekvivalentné.

---

- **Zadanie** (podľa K. Bachratá a kol.: *Matematika pre učiteľov informatiky 2* z projektu ĎVUI)**:**

  Nech $c \heartsuit d$ znamená, že chlapec $c$ má rád dievča $d$, a $d \blacklozenge c$ znamená, že dievča $d$ má rado chlapca $c$. Prečítajte nasledujúce výroky:

  1. $\forall d \exists c(c \heartsuit d)$
  2. $\exists c \forall d(c \heartsuit d)$

3. $\forall c \exists d (c \heartsuit d)$
4. $\exists d \forall c (c \heartsuit d)$
5. $\exists d \exists c (d \blacklozenge c \land c \heartsuit d)$
6. $\exists c \exists d (d \blacklozenge c \land c \heartsuit d)$

**Riešenie:**

1. Každé dievča je milované nejakým chlapcom.
2. Niektorý chlapec má rád všetky dievčatá.
3. Každý chlapec má rád nejaké dievča.
4. Existujú dievčatá milované všetkými chlapcami.
5. Existuje párik.
6. Existuje párik.

---

- **Zadanie** (podľa K. Bachratá a kol.: *Matematika pre učiteľov informatiky 2* z projektu ĎVUI)**:**

  Nech $c \heartsuit d$ znamená, že chlapec $c$ má rád dievča $d$, a $d \blacklozenge c$ znamená, že dievča $d$ má rado chlapca $c$. Napíšte výroky s nasledujúcimi významami:

  1. Existuje dievča, ktorého záujem je vždy opätovaný.
  2. Existuje dievča, ktoré vždy opätuje záujem.
  3. Existuje chlapec, ktorého záujem odradí každé dievča.
  4. Existuje chlapec, ktorý nikdy neopätuje záujem.
  5. Existuje dievča, ktoré má vždy súperku.
  6. Existuje úplná smoliarka: keď má rada nejakého chlapca, on už má rád inú.

  **Riešenie:**

  Nech $c$ je premenná, ktorej hodnotou môže byť ľubovoľný chlapec, a $d$, $d_1$ a $d_2$ premenné, ktorých hodnotou môže byť ľubovoľné dievča. Požadované výroky potom možno zapísať takto:

  1. $\exists d \forall c (d \blacklozenge c \to c \heartsuit d)$
  2. $\exists d \forall c (c \heartsuit d \to d \blacklozenge c)$
  3. $\exists c \forall d (c \heartsuit d \to \neg(d \blacklozenge c))$
  4. $\exists c \forall d (d \blacklozenge c \to \neg(c \heartsuit d))$
  5. $\exists d_1 \forall c (d_1 \blacklozenge c \to \exists d_2 (d_1 \neq d_2 \land d_2 \blacklozenge c))$
  6. $\exists d_1 \forall c (d_1 \blacklozenge c \to \exists d_2 (d_1 \neq d_2 \land c \heartsuit d_2))$

---

# Domáce úlohy

---

**1** Zistite, či je ekvivalencia asociatívna.

**2** Nech $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1$ a $\psi^2$ sú výroky. Zistite, ktoré z implikácií medzi výrokmi $(\varphi^1 \to \psi^1) \land (\varphi^2 \to \psi^2)$ a $(\varphi^1 \land \varphi^2) \to (\psi^1 \land \psi^2)$ platia a ktoré nie.

**3** Zistite, ktoré implikácie medzi nasledujúcimi výrokmi platia pre ľubovoľné výroky $\varphi$ a $\psi$:

- $\exists x (\varphi \land \psi)$ a $\exists x \varphi \land \exists x \psi$;
- $\forall x (\varphi \land \psi)$ a $\forall x \varphi \land \forall x \psi$.

**4** Zistite, či sú nasledujúce výroky ekvivalentné pre ľubovoľné výroky $\varphi$ a $\psi$, pričom $\psi$ nemá parameter $x$:

- $\exists x (\varphi \to \psi)$ a $\exists x \varphi \to \psi$;
- $\exists x (\varphi \leftrightarrow \psi)$ a $\exists x \varphi \leftrightarrow \psi$.

**5** Nech $c \heartsuit d$ znamená, že chlapec $c$ má rád dievča $d$, a $d \blacklozenge c$ znamená, že dievča $d$ má rado chlapca $c$. Napíšte výroky s nasledujúcimi významami:

1. Existuje chlapec, ktorého milujú všetky dievčatá, ale on nemá rád žiadnu.
2. Každé dievča má rado nejakého chlapca, ktorý má rád všetky ostatné, iba ju nie.

---