ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

1. cvičenie

- **Zadanie:**

  Pripomeňme znenie Euklidovej vety o odvesne:

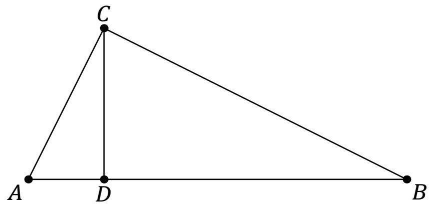
  Nech ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB a nech D je päta výšky na preponu. Potom platí

  $$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|.$$

  Napíšte dôkaz tejto vety a prepíšte ho ako sled argumentov.

  Riešenie:

  Dôkaz:

  Keďže D je päta výšky na preponu AB, uhol ADC je pravý. Keďže uhol ACB je pravý a uhly DAC a BAC sú totožné, a teda rovnako veľké, trojuholníky DAC a CAB sú podľa vety *uu* podobné. Z toho dostávame

  $$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

  a teda po úprave

  $$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|.$$

  Dôkaz ako sled argumentov:

  - „keďže D je päta výšky na preponu AB"
    odvolávka na predpoklad vety
  - „uhol ADC je pravý"
    prepis pojmu *päta výšky* podľa svojej definície
  - „keďže uhol ACB je pravý"
    odvolávka na predpoklad vety
  - „(keďže) uhly DAC a BAC sú totožné"
    odvolávka na definíciu uhla
  - „a teda (uhly DAC a BAC sú) rovnako veľké"
    logický dôsledok (vlastnosť rovnosti)
  - „trojuholníky DAC a CAB sú podľa vety *uu* podobné"
    odvolávka na autoritu (veta *uu* o podobnosti trojuholníkov s dvoma dvojicami rovnako veľkých uhlov)
  - „z toho dostávame $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$"
    odvolávka na definíciu podobnosti trojuholníkov
  - „a teda po úprave $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$"
    logický dôsledok (vlastnosť násobenia (predchádzajúci vzťah sme vynásobili číslom $|AC| \cdot |AD|$))

- **Zadanie:**

  Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí, že ak je číslo n^2 párne, tak aj číslo n je párne.

  Riešenie:

Budeme namiesto toho dokazovať obmenu vety (ktorá je s ňou ekvivalentná):

Nech n je prirodzené číslo. Potom ak číslo n nie je párne, tak ani číslo n^2 nie je párne.

Dôkaz:

Keďže číslo n nie je párne, musí byť nepárne, t. j. existuje prirodzené číslo k také, že $n = 2k + 1$. Potom však $n^2 = (2k+1)^2$, t. j. $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$, čiže $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Číslo n^2 je teda nepárne, čiže nie je párne.

- **Zadanie:**

  Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

  Riešenie:

  Pre každé n označme T_n tvrdenie

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

  Podľa vety o matematickej indukcii stačí namiesto vety „Pre každé prirodzené číslo n platí tvrdenie T_n." dokázať tieto vety:

  1° Platí tvrdenie T_0.

  2° Pre každé prirodzené číslo k z platnosti tvrdenia T_k vyplýva platnosť tvrdenia T_{k+1}.

  Dokážeme obe tieto vety:

  1° Tvrdenie T_0 znamená $0 \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2$, t. j. $0 = 0$, čo platí.

  2° Nech k je prirodzené číslo a nech platí tvrdenie T_k, t. j.

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

  Dokážeme, že potom platí tvrdenie T_{k+1}, t. j.

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)((k+1)+1) = \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2).$$

  Postupne upravujme:
  $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)((k+1)+1)$
  $= \big(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + \big) + ((k+1)((k+1)+1)),$
  $= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)((k+1)+1)$
  (podľa indukčného predpokladu, t. j. tvrdenia T_k),
  $= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2),$
  $= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$
  $= \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2).$

- **Zadanie:**

  V rovine je daných n priamok, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom. Dokážte, že tieto priamky delia rovinu na $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ súvislých oblastí.

  Riešenie:

  Pre každé n označme T_n tvrdenie „n priamok, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom, delí rovinu na $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ súvislých oblastí. ". Podľa vety o matematickej indukcii stačí namiesto vety „Pre každé prirodzené číslo n platí tvrdenie T_n." dokázať tieto vety:

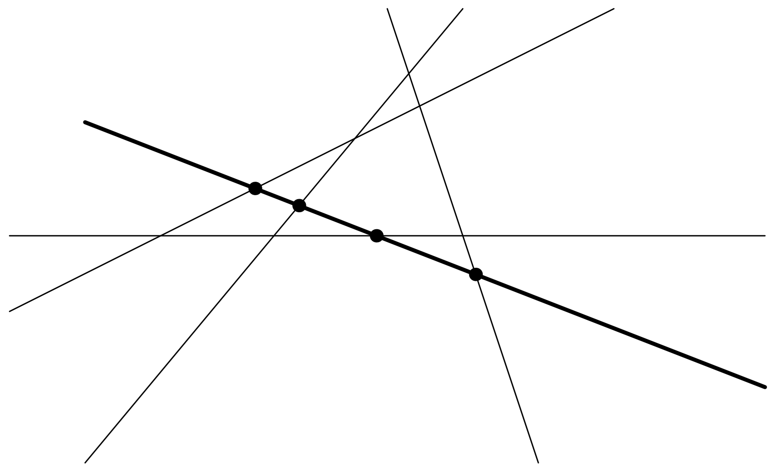
  1° Platí tvrdenie T_0.

  2° Pre každé prirodzené číslo k z platnosti tvrdenia T_k vyplýva platnosť tvrdenia T_{k+1}.

  Dokážeme obe tieto vety:

1° Tvrdenie T_0 hovorí: „0 priamok, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom, delí rovinu na $\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1$ súvislých oblastí. “. Toto tvrdenie je pravdivé, lebo jedinou vzniknutou oblasťou je celá rovina.

2° Nech k je prirodzené číslo a nech platí tvrdenie T_k, t. j. „k priamok, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom, delí rovinu na $\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 1$ súvislých oblastí. “. Dokážeme, že potom platí tvrdenie T_{k+1}, t. j. „$k + 1$ priamok, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom, delí rovinu na $\frac{1}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) + 1$ súvislých oblastí. “. Predpokladajme, že už máme k takýchto priamok a pridajme ešte jednu. Tá je so všetkými zvyšnými k priamkami rôznobežná a neprechádza žiadnym ich priesečníkom. To teda znamená, že jej pridaním vznikne presne k nových priesečníkov. Tie túto priamku rozdelia na $k + 1$ úsekov (úsečiek, polpriamok, prípadne i priamku). Každý z týchto úsekov leží v práve jednej doterajšej oblasti, takže ju rozdelí na dve nové (a stará zanikne). Pridaním novej priamky sa teda počet oblastí zväčší o $k + 1$.



Podľa indukčného predpokladu bolo pred pridaním $(k+1)$. priamky $\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 1$ oblastí, po jej pridaní ich teda bude $(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 1) + (k + 1)$ čiže (po úprave) $\frac{1}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) + 1$. To však znamená, že platí tvrdenie T_{k+1}.

Domáce úlohy

---

1 Nájdite v ľubovoľnom vysokoškolskom učebnom matematickom texte tri definície a tri vety. Špeciálne symboly vyznačte červenou, premenné modrou a (v definíciách) definovaný pojem zelenou. Skontrolujte tiež, či sa každá použitá premenná vyskytuje aspoň dvakrát.

2 Vyhľadajte na internete ľubovoľný stredoškolský učebný matematický text a vyznačte v ňom matematicko-typografické chyby.

3 Pripomeňme znenie Euklidovej vety o výške:

Nech ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB a nech D je päta výšky na preponu. Potom platí

$$|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|.$$

Napíšte dôkaz tejto vety a prepíšte ho ako sled argumentov.

4 Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí, že ak je číslo n^2 deliteľné 3, tak aj číslo n je deliteľné 3.

5 Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n + 1)\right)^2.$$
