Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Prírodovedecká fakulta

OPERÁCIE NA AUTOMATOCH SO VŠETKÝMI STAVMI KONCOVÝMI

ŠTUDENTSKÁ VEDECKÁ KONFERENCIA

Študijný odbor:	Informatika
Školiace pracovisko:	Ústav informatiky
Školiteľ:	RNDr. Galina Jirásková, CSc.

Košice 2015

Bc. Zuzana Brťková

Abstrakt

Táto práca je venovaná popisnej zložitosti rôznych regulárnych operácií na neúplných deterministických automatoch so všetkými stavmi koncovými. Cieľom našej práce je nájsť minimálne a maximálne zložitosti, ktoré môžu nadobúdať operácie prienik, zjednotenie a rozdiel, v závislosti od počtu stavov vstupných automatov. Okrem toho sa v prípade operácie prienik budeme venovať aj skúmaniu, ktoré ďalšie hodnoty zo zisteného rozsahu je možné dosiahnuť.

Kľúčové slová: popisná zložitosť, neúplný automat, prienik automatov

Obsah

Úvod

Popisná zložitosť regulárnych jazykov je jednou z najstarších tém v teoretickej informatike, ako aj v teórii formálnych jazykov. Základné vlastnosti regulárnych jazykov boli skúmané už v polovici 20.storočia, kedy sa zdalo, že všetky hlavné problémy - až na niekoľko veľmi ťažkých - boli vyriešené.

V posledných desaťročiach sa však regulárne jazyky začali opäť stávať predmetom výskumu a to nielen z dôvodu ich teoretického významu [3] [9] ale aj z hľadiska ich možnej aplikácie v softvérovom inžinierstve aj ďalších oblastiach informatiky. Jedným z problémov, ktorým sa súčasný výskum hlbšie venuje, je popisná zložitosť regulárnych jazykov, ktorá skúma prostriedky potrebné na popis jazyka v závislosti od použitých formálnych systémov, ako sú napríklad deterministické a nedeterministické automaty, či formálne gramatiky.

V našej práci sa zameriame na operácie prienik, zjednotenie a rozdiel na neúplných deterministických automatoch so všetkými stavmi koncovými, ktoré reprezentujú podtriedu prefixovo uzavretých jazykov. Jazyk L je prefixovo uzavretý ak pre akékoľvek slovo $w \in L$ platí, že aj každý prefix slova w patrí do L.

V prvej časti práce sa budeme venovať zložitosti prieniku v najhoršom prípade, pričom predpokladáme, že horná hranica zložitosti je rovná mn. P sa pokúsime dokázať, že táto hranica platí pre každú dvojicu automatov bez ohľadu na počet ich stavov a preto ju už nemožno znížiť. Ďalej prejdeme k vymedzeniu dolnej hranice, kde ukážeme, že súčinový automat reprezentujúci dva disjunktné jazyky bude mať vždy len jeden stav, minimálna zložitosť bude teda 1. Následne sa budeme venovať všetkým možným dosiahnuteľným zložitostiam, kde sa pokúsime ukázať, že prienik dvoch neúplných automatov so všetkými stavmi koncovými môže nadobúdať všetky zložitosti v rozsahu od 1 až do mn, pričom naším cieľom bude dokázať túto skutočnosť s použitím čo najmenšej abecedy.

V ďalších kapitolách preskúmame operácie zjednotenie a rozdiel a pokúsime sa rovnako ako u prieniku stanoviť dolný a horný odhad zložitosti týchto operácií a dokázať jeho korektnosť pre všetky prirodzené čísla.

Kapitola 1

Základné pojmy

V tejto kapitole uvedieme definície základných pojmov využívaných v tejto práci.

Definícia 1.1 **Abeceda** je konečná neprázdna množina symbolov (písmen). Označuje sa Σ.

Definícia 1.2 **Slovo** nad abecedou Σ je konečná postupnosť symbolov zo Σ. Prázdnu postupnosť (prázdne slovo) označujeme ε.

Definícia 1.3 **Jazyk** nad abecedou Σ je ľubovoľná množina slov nad abecedou Σ.

Definícia 1.4 **Deterministický konečnostavový automat** (DKA) je usporiadaná pätica $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde Q je konečná množina stavov, Σ je konečná abeceda, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ je prechodová funkcia, $q_0 \in Q$ je počiatočný stav a $F \subseteq Q$ je konečná množina koncových stavov.

Definícia 1.5 Deterministický konečnostavový automat nazveme **neúplný**, ak pre nejaký stav $q \in Q$ a pre nejaké písmeno $a \in \Sigma$ prechodová funkcia $\delta(q, a)$ nie je definovaná.

Definícia 1.6 Neúplný DKA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, Q)$, v ktorom všetky stavy sú koncové **akceptuje** slovo $w \in \Sigma^*$, $w = a_1 a_2 \cdots a_k$ práve vtedy, ak existuje výpočet $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_k} q_k$, kde $q_i \in Q, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Definícia 1.7 Jazyk akceptovaný automatom A je množina $L(A) = \{w \in \Sigma^* : A \textit{ akceptuje } w\}$.

Definícia 1.8 Stav $q \in Q$ v automate A je **dosiahnuteľný**, ak existuje slovo $w = a_1 a_2 \cdots a_k$ také, že $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_k} q$, $q_i \in Q$.

Definícia 1.9 Stavy $q_1, q_2 \in Q$ sú **neekvivalentné**, ak existuje slovo $w \in \Sigma^*$ také, že zo stavu q_1 je slovo w akceptované, zo stavu q_2 slovo w nie je akceptované.

Definícia 1.10 Deterministický konečnostavový automat je **minimálny**, ak všetky stavy $q \in Q$ sú dosiahnuteľné a pre každú dvojicu stavov $q_1, q_2 \in Q$ takú, že $q_1 \neq q_2$ platí, že stavy q_1 a q_2 sú neekvivalentné.

Definícia 1.11 **Popisnou zložitosťou** jazyka nad abecedou Σ rozumieme počet stavov minimálneho DKA pre tento jazyk.

Kapitola 2

Prienik automatov so všetkými stavmi koncovými

2.1 Maximálna zložitosť

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať maximálnou zložitosťou, ktorú môže nadobúdať prienik dvoch neúplných automatov so všetkými stavmi koncovými. Vyslovíme horný odhad tejto zložitosti a dokážeme jeho korektnosť pre každé prirodzené číslo m a n.

Lemma 2.1 *Nech $m, n \geq 1$. Potom pre každý m-stavový neúplný DKA A a pre každý n-stavový neúplný DKA B také, že všetky stavy automatov A a B sú koncové, existuje neúplný DKA pre jazyk $L(A) \cap L(B)$, ktorý má nanajvýš mn stavov.*

Dôkaz.
Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, Q_A)$ a $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, Q_B)$, pričom $|Q_A| = m$ a $|Q_B| = n$. Ukážeme, že možno zostrojiť automat M s mn stavmi pre jazyk $L(A) \cap L(B)$.

Nech $M = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, s, Q_A \times Q_B)$, kde $s = (s_A, s_B)$ a pre každé $a \in \Sigma$

$$\delta((p,q),a) = \begin{cases} (\delta_A(p,a), \delta_B(q,a)) & \text{ak } \delta_A(p,a) \text{ a } \delta_B(q,a) \text{ sú definované,} \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$

Automat M teda má mn stavov. Ukážeme, že $L(M) = L(A) \cap L(B)$, teda že automat M skutočne akceptuje prienik jazykov reprezentovaných automatmi A a B.

Nech $w \in L(A) \cap L(B)$, pričom $w = a_1 a_2 \cdots a_k$ kde $a_i \in \Sigma$.
Keďže $w \in L(A)$, potom existuje postupnosť stavov $p_0, p_1, \ldots, p_k$ v Q_A taká, že $p_0 = s_A$ a

$$\begin{aligned}
\delta_A(p_0, a_1) &= p_1, \\
\delta_A(p_1, a_2) &= p_2, \\
&\vdots \\
\delta_A(p_{k-1}, a_k) &= p_k.
\end{aligned}$$

Keďže $w \in L(B)$, tak podobne existuje postupnosť stavov $q_0, q_1, \ldots, q_k$ v Q_B taká, že $q_0 = s_B$ a

$$\begin{aligned}
\delta_B(q_0, a_1) &= q_1, \\
\delta_B(q_1, a_2) &= q_2, \\
&\vdots \\
\delta_B(q_{k-1}, a_k) &= q_k.
\end{aligned}$$

Potom v automate M dostávame postupnosť stavov $(p_0, q_0), (p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$ takú, že

$$\begin{aligned}
\delta((p_0, q_0), a_1) &= (p_1, q_1), \\
\delta((p_1, q_1), a_2) &= (p_2, q_2), \\
&\vdots \\
\delta((p_{k-1}, q_{k-1}), a_k) &= (p_k, q_k).
\end{aligned}$$

To ale znamená, že $w \in L(M)$ t.j. $L(A) \cap L(B) \subseteq L(M)$.

Nech teraz $w \in L(M)$, pričom $w = a_1 a_2 \cdots a_k$, kde $a_i \in \Sigma$. Keďže $w \in L(M)$, potom existuje postupnosť stavov $(p_0, q_0), (p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$ v $Q_A \times Q_B$ taká, že $(p_0, q_0) = s$ a

$$\begin{aligned}
\delta((p_0, q_0), a_1) &= (p_1, q_1), \\
\delta((p_1, q_1), a_2) &= (p_2, q_2), \\
&\vdots \\
\delta((p_{k-1}, q_{k-1}), a_k) &= (p_k, q_k).
\end{aligned}$$

Z toho ale vyplýva, že v automate A $s_A = p_0$ a

$$\begin{aligned} \delta_A(p_0, a_1) &= p_1, \\ \delta_A(p_1, a_2) &= p_2, \\ &\vdots \\ \delta_A(p_{k-1}, a_k) &= p_k. \end{aligned}$$

To znamená, že existuje výpočet $p_0, p_1, \ldots, p_k$ v Q_A nad slovom $a_1 a_2 \cdots a_k = w$, z čoho vyplýva, že $w \in L(A)$.

Analogicky v automate B $s_B = q_0$ a

$$\begin{aligned} \delta_B(q_0, a_1) &= q_1, \\ \delta_B(q_1, a_2) &= q_2, \\ &\vdots \\ \delta_B(q_{k-1}, a_k) &= q_k. \end{aligned}$$

To znamená, že existuje výpočet $q_0, q_1, \ldots, q_k$ v Q_B nad slovom $a_1 a_2 \cdots a_k = w$, z čoho vyplýva, že $w \in L(B)$.

Dokázali sme teda, že $w \in L(A)$ aj $w \in L(B)$, čo znamená, že platí $L(M) \subseteq L(A) \cap L(B)$. Z toho vyplýva, že platí rovnosť $L(M) = L(A) \cap L(B)$, teda automat M skutočne akceptuje prienik jazykov reprezentovaných automatmi A a B.

$\square$

V predchádzajúcom dôkaze sme ukázali, že maximálna zložitosť prieniku nemôže byť vyššia ako mn. Teraz však treba dokázať, že túto hranicu už nemožno znížiť a to tak, že nájdeme dvojicu automatov, ktorá zložitosť mn skutočne dosahuje.

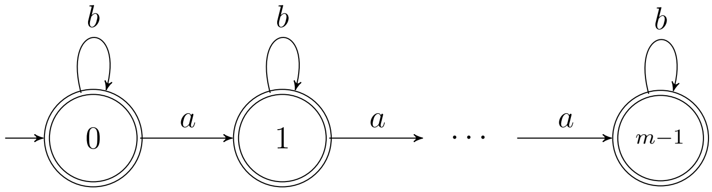
Lemma 2.2 *Nech $m, n \geq 1$. Potom existuje m-stavový neúplný DKA A a n-stavový neúplný DKA B také, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny neúplný DKA pre jazyk $L(A) \cap L(B)$, má práve mn stavov.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 2.1 kde:
$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,

$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

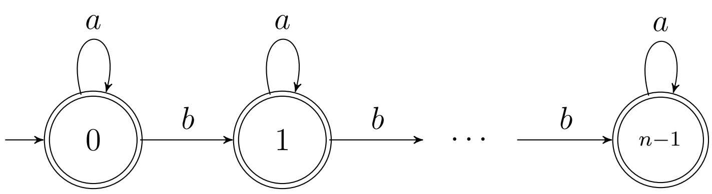
$$\delta_A(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq m-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$
$$\delta_A(i,b) = \quad i \quad \text{pre všetky i} \in \{0,1,\ldots,m-1\},$$



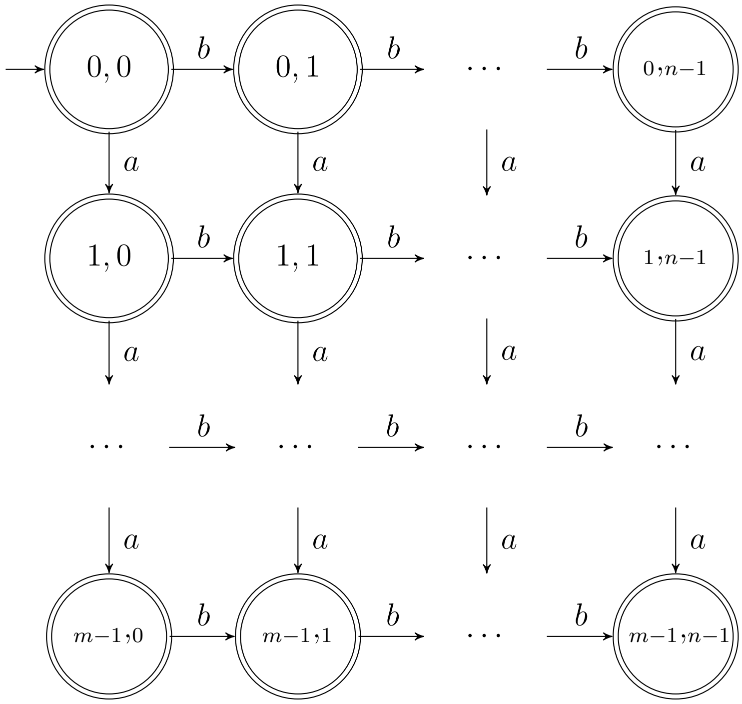
Obr. 2.1: Automat A.

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 2.2 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_A(i,a) = \quad i \quad \text{pre všetky i} \in \{0,1,\ldots,n-1\},$$
$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$



Obr. 2.2: Automat B.



Obr. 2.3: Automat M pre jazyk $L(A) \cap L(B)$.

Teraz si zostrojme súčinový automat $M = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, s, Q_A \times Q_B)$, viď Obr. 3.19, pričom $s = (0, 0)$, rovnako ako v predchádzajúcom dôkaze.

Ukážeme:

a) Všetky stavy automatu M sú dosiahnuteľné.
Označme teda každý stav ako dvojicu (i, j), kde $i = 0, \ldots, m-1$ a $j = 0, \ldots, n-1$. Keďže po prečítaní písmena a sa posunieme o práve jeden stav dolu a po prečítaní písmena b sa posunieme o práve jeden stav doprava, potom pre každý stav platí, že z počiatočného stavu sa pre slovo $w = a^i b^j$ posunieme o i riadkov a j stĺpcov a teda stav (i, j) je dosiahnuteľný.

b) Žiadne dva rôzne stavy nie sú ekvivalentné.
Majme stavy (i, j) a (k, l) také, že $(i, j) \neq (k, l)$. Ak $i \neq k$, tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $i < k$. Uvažujme slovo $a^{m-k} = a^{m-1-k}a$. Zo stavu (k, l) po prečítaní prvej časti slova a^{m-1-k} prejdeme do stavu $(m-1, l)$, ostáva nám prečítať ešte písmeno a. Keďže prechod na a nie je z tohto stavu definovaný, slovo $a^{m-1-k}a$ nie je

zo stavu (k, l) akceptované. Zo stavu (i, j) po prečítaní slova $a^{m-1-k}a$ prejdeme do akceptujúceho stavu $(i + m - k, j)$. Z toho vyplýva, že stavy (i, j) a (k, l) nie sú ekvivalentné.
Ak $j \neq l$, tak symetricky rozlíšime stavy pomocou slova $b^{n-1-l}b$.

$\square$

Dokázali sme teda, že pre akékoľvek prirodzené m a n existuje dvojica automatov s prislúchajúcim počtom stavov taká, že ich prienik bude mať zložitosť mn. Teraz si tieto zistenia zhrnieme do finálnej vety.

Veta 2.3 *Maximálna zložitosť prieniku dvoch jazykov akceptovaných m-stavovým a n-stavovým neúplným DKA so všetkými stavmi koncovými je mn.*

Dôkaz.
Podľa Lemmy 2.1 pre každý m-stavový neúplný automat A a každý n-stavový neúplný automat B so všetkými stavmi koncovými existuje automat pre jazyk $L(A) \cap L(B)$, ktorý má nanajvýš mn stavov, teda zložitosť prieniku je vždy nanajvýš mn.
Podľa Lemmy 2.2 pre každé $m, n \geq 1$ existuje m-stavový automat A a n-stavový automat Btaký, že automat akceptujúci prienik jazykov $L(A) \cap L(B)$ má práve mn stavov a teda maximálna zložitosť prieniku nemôže byť nižšia ako mn.

$\square$

2.2 Minimálna zložitosť

V nasledujúcej časti sa zameriame na minimálnu možnú zložitosť prieniku dvoch jazykov reprezentovaných neúplnými automatmi so všetkými koncovými stavmi. Stanovenú dolnú hranicu formálne dokážeme pre akékoľvek prirodzené m a n.

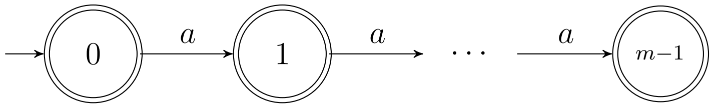
Lemma 2.4 *Nech $m, n \geq 1$. Potom existujú m-stavový neúplný DKA A a n-stavový neúplný DKA B také, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny neúplný DKA pre jazyk $L(A) \cap L(B)$ má práve 1 stav.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 2.4 kde:

$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

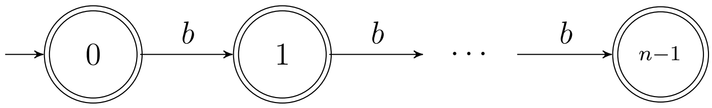
$$\delta_A(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq m-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$
$$\delta_A(i,b) = \textit{nedefinované.}$$



Obr. 2.4: Automat A.

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 2.5 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i,a) = \textit{nedefinované.}$$
$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$



Obr. 2.5: Automat B.

V takomto prípade bude automat akceptujúci jazyk $L(A) \cap L(B)$ akceptovať jedine a len prázdne slovo a teda počet stavov automatu pre tento jazyk bude práve 1.

$\square$

Ukázali sme, že bez ohľadu na voľbu čísel m a n, vieme nájsť takú dvojicu automatov s daným počtom stavov, že k nim prislúchajúci súčinový automat bude mať presne jeden stav. Minimálna zložitosť sa teda rovná hodnote 1.

2.3 Rozsah dosiahnuteľných zložitostí

V predchádzajúcich podkapitolách sme určili že zložitosť prieniku m-stavového neúplného DKA a n-stavového neúplného DKA so všetkými koncovými stavmi sa pohybuje v rozmedzí od 1 do mn pre akékoľvek prirodzené m a n. Cieľom nasledujúcej časti je preskúmať, ktoré hodnoty v tomto zistenom rozsahu môže tento prienik nadobúdať. V prvej lemme sa zameriame na prípad, že chceme vyrobiť iba jeden neúplný stĺpec, teda požadovaná zložitosť je menšia ako m.

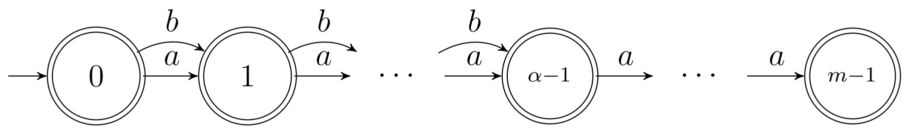
Lemma 2.5 *Nech $m, n \geq 1$, pričom platí $m \leq n$. Potom pre každé $\alpha \in \mathbb{N}$ také, že $1 < \alpha < m$ existuje m-stavový automat A a n-stavový automat B nad binárnou abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ taký, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny DKA pre jazyk $L(A) \cap L(B)$ má práve α stavov.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 2.6 kde:
$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_A(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq m-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$

$$\delta_A(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < \alpha-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$

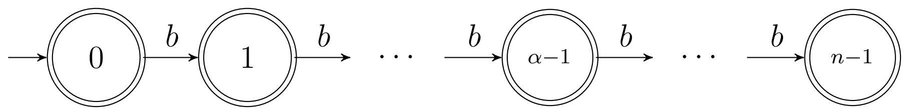


Obr. 2.6: Automat A.

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 2.7 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$

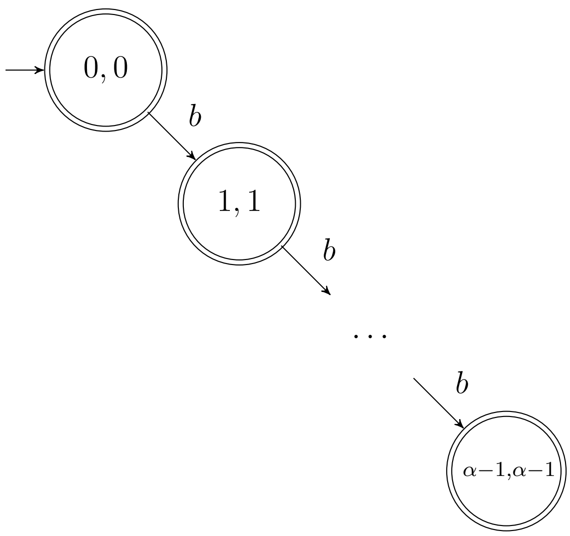
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i,a) = \textit{nedefinované},$$
$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$



Obr. 2.7: Automat B.

Teraz si zostrojme súčinový automat $M = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, s, Q_A \times Q_B)$, viď Obr. 2.8 pričom $s = (0,0)$.



Obr. 2.8: Automat M pre jazyk $L(A) \cap L(B)$.

V tomto automate budú dosiahnuteľné iba stavy (i,i) pre ktoré platí $0 \leq i \leq \alpha - 1$. Tieto stavy budú navzájom neekvivalentné, keďže ľubovoľné dva stavy (i,i) a (j,j), kde $i < j$ možno rozlíšiť slovom $b^{\alpha-j}$. Automat pre jazyk $L(A) \cap L(B)$ bude mať teda presne α stavov.

$\square$

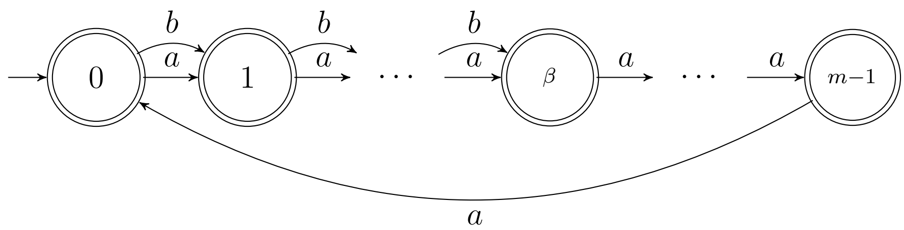
Dokázali sme teda, že pre každú hodnotu menšiu ako m vieme nájsť taký automat s m stavmi a taký automat s n stavmi, že minimálny DKA akceptujúci ich prienik bude mať počet stavov rovný tejto hodnote.V ďalšej lemme sa pokúsime dokázať, že vieme dosiahnuť hodnoty od m až po $m+n-1$ t.j. vyrobíme všetky stavy v prvom stĺpci a želaný počet stavov z prvého riadka.

Lemma 2.6 *Nech $m, n \geq 1$, pričom platí $m \leq n$. Potom pre každé $\alpha \in \mathbb{N}$ také, že $m \leq \alpha < m+n-1$ existuje m-stavový automat A a n-stavový automat B nad binárnou abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ taký, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny DKA pre jazyk $L(A) \cap L(B)$ má práve α stavov.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 2.9 kde:
$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
$\beta = \alpha - m$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_A(i, a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq m-1, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$
$$\delta_A(i, b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < \beta, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$



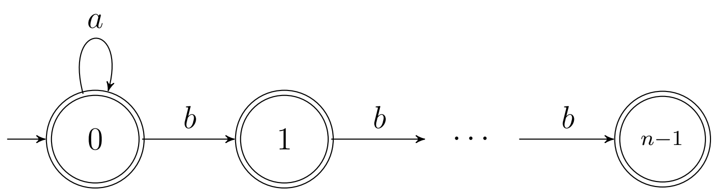
Obr. 2.9: Automat A.

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 2.10 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$

a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i,a) = \begin{cases} i & \text{ak } i = 0, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$

$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$



Obr. 2.10: Automat B.

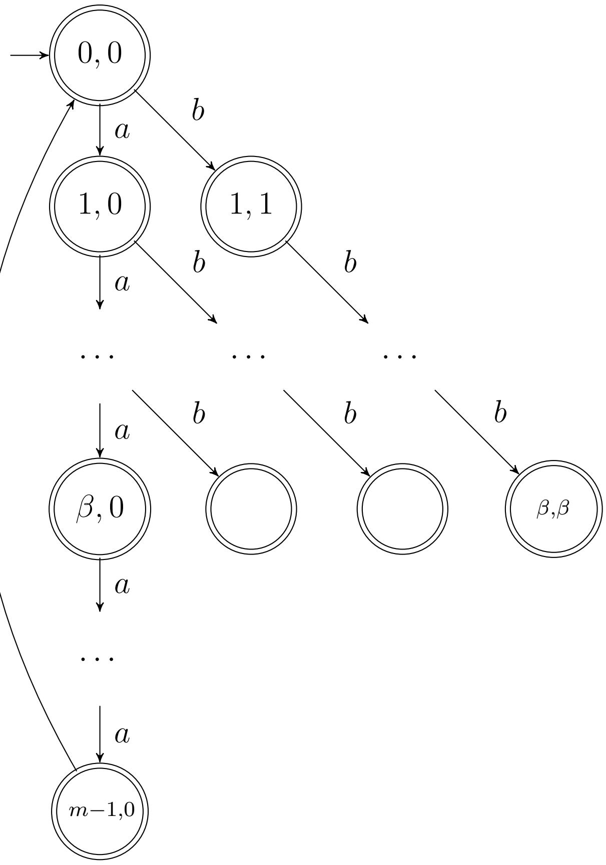
Teraz si zostrojme súčinový automat $M = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, s, Q_A \times Q_B)$, viď Obr. 2.11 pričom $s = (0,0)$.

Vo výslednom súčinovom automate sú dosiahnuteľné také stavy (i,j), pre ktoré platí, že $i = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ a $j = 0$ alebo $i = \{1, \ldots, \beta\}$ a $j = \{1, \ldots, i\}$. Žiadne ďalšie stavy sa nevyrobia, pretože zo stavov v stĺpci 0 je prechod na písmeno b definovaný iba po riadok $\beta - 1$ a v stavoch v stĺpcoch 1 až β nie je definovaný prechod pre písmeno a.
Navyše, ako si môžeme všimnúť, vo výslednom súčinovom automate sa nachádzajú ekvivalentné stavy, preto je potrebné ho zminimalizovať. Stavy v stĺpci 0 sú neekvivalentné navzájom aj vzhľadom na stavy z ostatných stĺpcov, čo dokážeme neskôr, preto sa zameriame na stavy zo stĺpcov 1 až β. Ak si označíme stav automatu ako (i,j), potom pre každý stav taký, že $j \neq 0$ platí, že akceptuje všetky slová w v tvare $w = b^d$, kde $d = \{0, 1, \ldots, \beta - i\}$. Z toho potom vyplýva, že množina slov akceptovaných zo stavu (i,j) kde $j \neq 0$ je zhodná z množinou akceptovaných slov každého stavu v tom istom riadku. To znamená, že stav (i,j) je ekvivalentný s každým stavom (k,l) takým, že $i = k$. Zlúčením ekvivalentných stavov teda dostaneme automat na Obr. 2.12.

Ukážeme:

1. Všetky stavy automatu M sú dosiahnuteľné.

   Označme teda každý stav ako dvojicu (i,j) a uvažujme 2 podprípady:



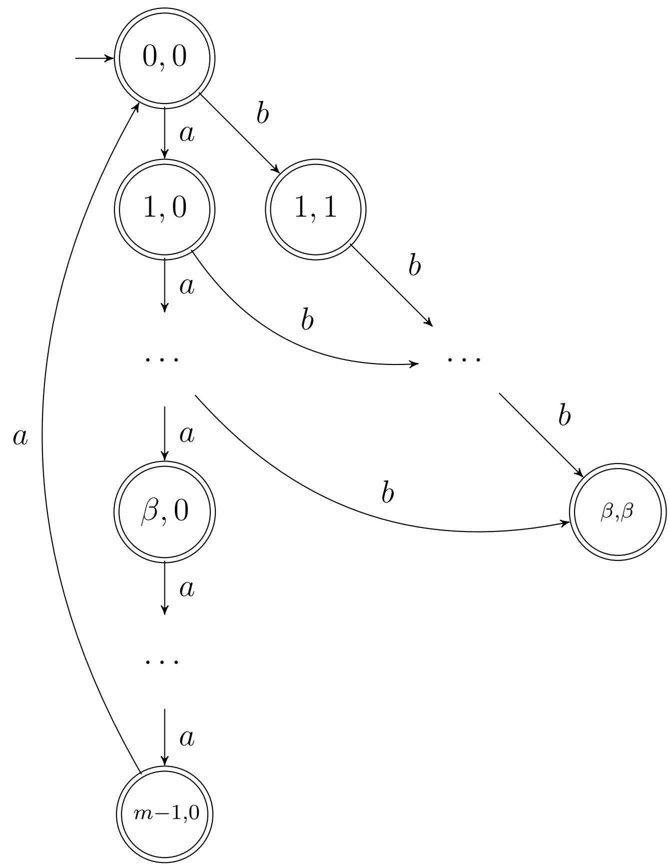
Obr. 2.11: Automat M pre jazyk $L(A) \cap L(B)$.

a) Ak $j = 0$, potom sa po prečítaní písmena a posunieme o práve jeden stav dolu , čo znamená, že pre každý takýto stav platí, že z počiatočného stavu sa pre slovo $w = a^i$ posunieme presne o i riadkov. Stav (i, j) je teda dosiahnuteľný.

b) Ak $j \neq 0$ a $i = j$, potom sa po prečítaní písmena b posunieme o práve jeden stav dolu a o práve jeden stav doprava, čo znamená, že pre každý takýto stav sa z počiatočného stavu pre slovo $w = b^i$ posunieme presne o i riadkov a i stĺpcov, stav (i, j) je teda dosiahnuteľný.

2. Žiadne dva rôzne stavy nie sú ekvivalentné.

   Majme stavy (i, j) a (i', j') také, že $(i, j) \neq (i', j')$. Rozdelíme si dôkaz na 2 časti a to na prípad, ak $j \neq j'$, teda stavy sa nachádzajú v rozdielnych stĺpcoch a prípad $j = j'$ teda ak sa stavy nachádzajú v rovnakom



Obr. 2.12: Minimálny automat M pre jazyk $L(A) \cap L(B)$.

stĺpci.

a) Ak $j \neq j'$, tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $j < j'$. Rozoberme 2 podprípady:

   (i) Ak $j = 0$ a $j' > 0$, potom uvažujme písmeno a. Zatiaľ čo z každého stavu (i, j) kde $j = 0$ je prechod pre toto písmeno definovaný, pre stavy (i', j') také, že $j' > 0$ je prechod pre písmeno a nedefinovaný. Stavy (i, j) a (i', j') sú preto neekvivalentné.

   (ii) Ak $j > 0$ a $j' > 0$, uvažujme slovo $b^{\beta-j'+1} = b^{\beta-j'}b$. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní prvej časti slova $b^{\beta-j'}$ dostaneme do stavu (β, β), zostáva nám dočítať ešte písmeno b. Z tohto stavu je však prechod pre písmeno b nedefinovaný, slovo $b^{\beta-j'+1}$ je preto zo stavu (i', j') neakceptované. Zo stavu (i, j) prejdeme po prečítaní slova do akceptujúceho stavu $(j+\beta-j'+1, j+\beta-j'+1)$. Stavy (i,j) a (i',j') sú teda s určitosťou neekvivalentné.

b) Ak $j=j'$, potom vieme s určitosťou povedať $j=j'=0$, pretože v stĺpcoch, kde $j>0$ sa nachádza vždy nanajvýš jeden stav. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $i<i'$. Uvažujme teda slovo $a^{m-i}b^{\beta}$. Zo stavu (i,j) sa po prečítaní prvej časti slova a^{m-i} dostaneme do stavu $(0,0)$, prečítaním zvyšku slova b^{β} prejdeme do akceptujúceho stavu (β,β). Zo stavu (i',j') sa po prečítaní prvej časti slova presunieme do stavu $((i'+m-i) \mod m, 0)$ resp. $(i'-i, 0)$, zostáva nám dočítať ešte zvyšok slova b^{β}. Keďže ale s každého stavu v stĺpci 0 a riadku i dokážeme prečítať nanajvýš slová dĺžky $\beta-i$ a platí predpoklad $i<i'$, t.j $i'-i>0$, slovo b^{β} sa s určitosťou nedočíta. Zo stavu (i',j') je teda slovo $a^{m-i}b^{\beta}$ neakceptované, čo znamená, že stavy (i,j) a (i',j') sú neekvivalentné.

$\square$

Podarilo sa nám ukázať, že pre každé m a každé n a každú hodnotu až po $m+n-1$ vieme nájsť takú dvojicu m-stavového a n-stavového automatu, že minimálny DKA akceptujúci ich prienik bude mať počet stavov zodpovedajúci tejto hodnote. Ostáva nám ešte ukázať, že takisto je možné dosiahnuť všetky ostatné hodnoty až po mn.

Lemma 2.7 *Nech $m,n \geq 1$, pričom platí $m \leq n$. Potom pre každé $\alpha \in \mathbb{N}$ také, že $m+n-1 \leq \alpha < mn$ existuje m-stavový automat A a n-stavový automat B nad abecedou $\Sigma = \{a,b,c\}$ taký, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny DKA pre jazyk $L(A) \cap L(B)$ má práve α stavov.*

Dôkaz.
Rozložme si číslo α nasledovne:

$$\alpha = m + k(n-1) + l$$

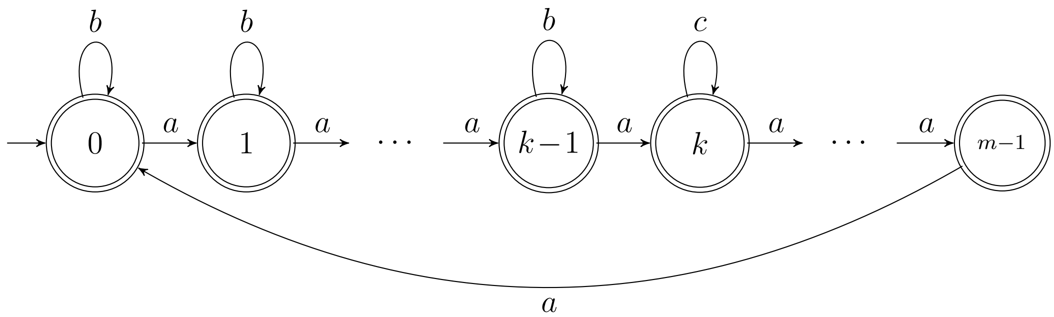
pričom $0 < k < m$ a $0 \leq l < n-1$

Ďalej si popíšme automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 2.13 kde:
$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b, c\}$

a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_A(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq m-1, \\ 0 & \text{ak } i = m-1, \end{cases}$$
$$\delta_A(i,b) = \begin{cases} i & \text{ak } i < k, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak}, \end{cases}$$
$$\delta_A(i,c) = \begin{cases} i & \text{ak } i = k, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak}. \end{cases}$$

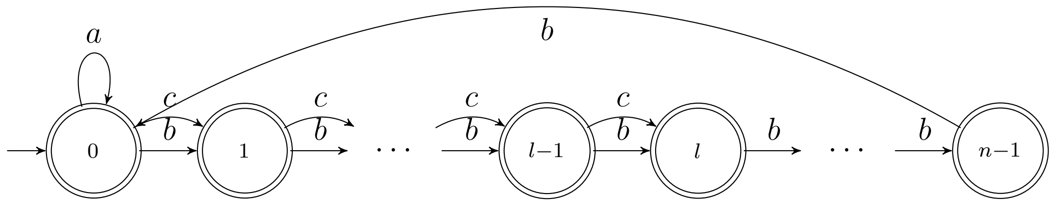


Obr. 2.13: Automat A.

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 2.14 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b, c\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i,a) = \begin{cases} i & \text{ak } i = 0, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak}. \end{cases}$$
$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i \neq n-1, \\ 0 & \text{inak}. \end{cases}$$
$$\delta_B(i,c) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < l, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak}. \end{cases}$$

Teraz si zostrojme súčinový automat $M = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, s, Q_A \times Q_B)$, viď Obr. 2.15 pričom $s = (0,0)$.



Obr. 2.14: Automat B.

Ukážeme:

1. Všetky stavy automatu M sú dosiahnuteľné.

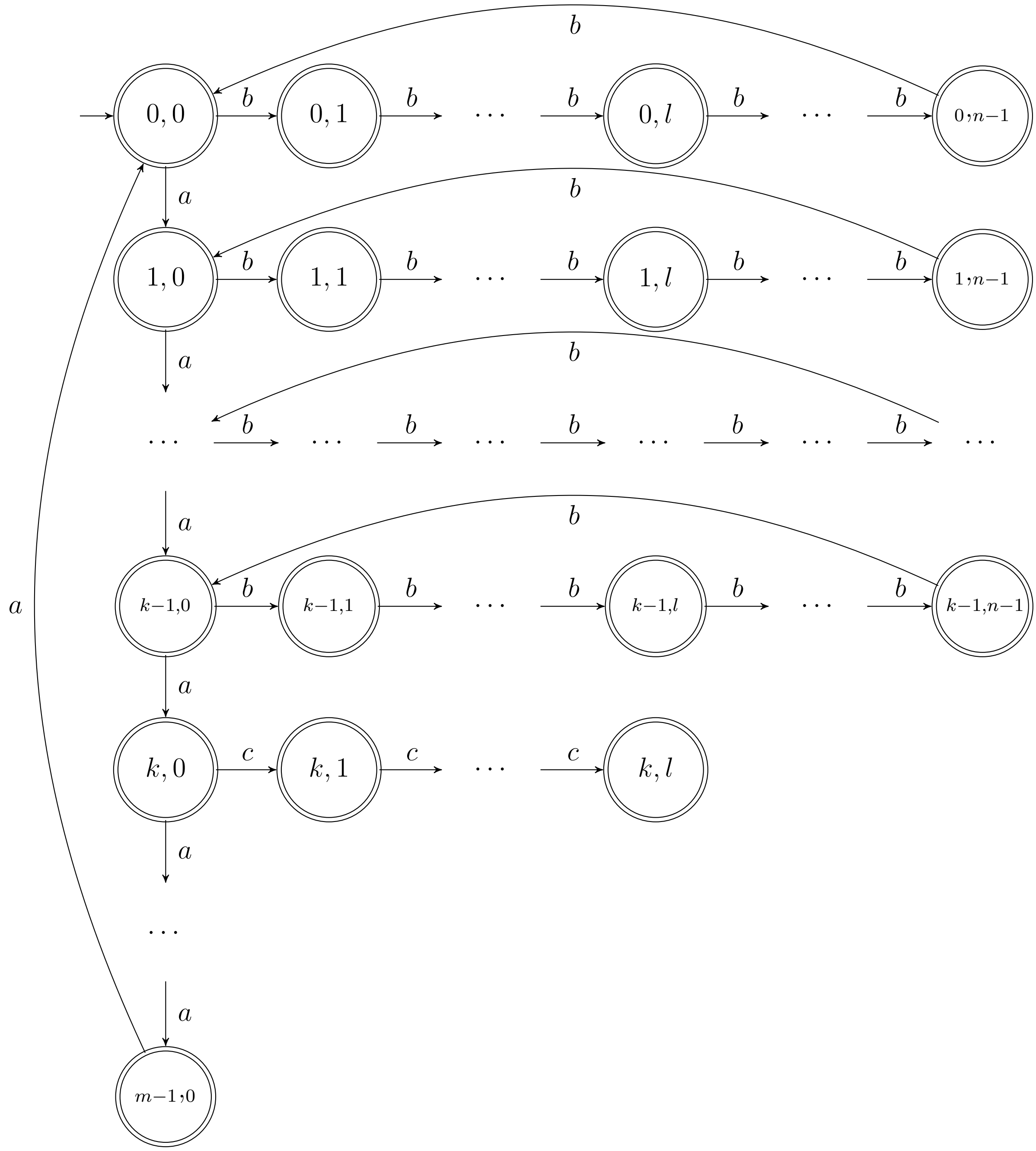
   Najprv si rozdelíme stavy automatu na tri skupiny. Ak si označíme každý stav ako dvojicu (i, j), potom prvú skupinu stavov budú tvoriť stavy, kde $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ a $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Do druhej skupiny budú patriť stavy, kde $i = k$ a $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$ a do tretej skupiny sa zaradia stavy, pre ktoré platí, že $i \in \{k+1, \ldots, m-1\}$ a $j = 0$.

   a) Nech $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ a $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Keďže po prečítaní písmena a sa posunieme o práve jeden stav dolu a po prečítaní písmena b sa posunieme o práve jeden stav doprava, potom pre každý stav z tejto množiny platí, že z počiatočného stavu $(0, 0)$ sa pre slovo $w = a^i b^j$ posunieme o i riadkov a j stĺpcov a teda stav (i, j) je dosiahnuteľný.

   b) Nech $i = k$ a $j \in \{0, \ldots, l\}$. Keďže po prečítaní písmena a sa posunieme o práve jeden stav dolu a po prečítaní písmena c sa v riadku k posunieme o práve jeden stav doprava, potom pre každý stav z tejto množiny platí, že z počiatočného stavu $(0, 0)$ sa pre slovo $w = a^i c^j$ posunieme o i riadkov a j stĺpcov a teda stav (i, j) je dosiahnuteľný.

   c) Nech $i \in \{k+1, \ldots, m-1\}$ a $j = 0$. Keďže po prečítaní písmena a sa posunieme o práve jeden stav dolu, potom pre každý stav z tejto množiny platí, že z počiatočného stavu $(0, 0)$ sa pre slovo $w = a^i$ posunieme o i riadkov a teda stav (i, j) je dosiahnuteľný.

2. Žiadne dva rôzne stavy nie sú ekvivalentné.



Obr. 2.15: Automat M pre jazyk $L(A) \cap L(B)$.

Majme stavy (i, j) a (i', j') také, že $(i, j) \neq (i', j')$. Rozdelíme si dôkaz na 2 časti a to na prípad, ak $i \neq i'$, teda stavy sa nachádzajú v rozdielnych riadkoch a prípad $i = i'$ teda ak sa stavy nachádzajú v rovnakom riadku.

a) Ak $i \neq i'$ tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $i < i'$. Uvažujme 4 podprípady:

   (i) Ak $i < k$ a zároveň $i' < k$, uvažujme slovo $b^{n-j}a^{k-i-1}b$. Zo stavu (i, j) po prečítaní prvej časti slova b^{n-j} prejdeme do stavu $(i, 0)$, po prečítaní druhej časti slova a^{k-i-1} sa presunieme do stavu $(k-1, 0)$, z ktorého sa potom písmenom b dostaneme do akceptujúceho stavu $(k-1, 1)$. Zo stavu (i', j') po prečítaní prvej časti slova b^{n-j} prejdeme do stavu $(i', (j' + n - j) \mod n)$. Ak platí $j \neq j'$, potom vieme s určitosťou povedať, že $(j' + n - j) \mod n \neq 0$, čo znamená, že sa druhá časť slova nedočíta, pretože prechod pre písmeno a je definovaný jedine pre stavy v stĺpci 0. Ak platí $j = j'$, potom sme po prečítaní prvej časti slova prešli do stavu $(i', 0)$ a zostáva nám prečítať zvyšok slova $a^{k-i}b$. Po prečítaní nasledujúcej časti slova a^{k-i} sa dostaneme do stavu $(i' + k - i, 0)$ a ostáva už len prečítať písmeno b. Keďže však vieme, že $i < i'$, znamená to, že $i' + k - i > k$, prechod pre písmeno b je však definovaný len pre stavy v riadkoch kde $i' < k$. To ale znamená, že sa slovo nedočíta. Slovo $b^{n-j}a^{k-i}b$ teda zo stavu (i', j') nie je akceptované, čo znamená, že stavy (i, j) a (i', j') nie sú ekvivalentné.

   (ii) Ak $i < k$ a zároveň $i' \geq k$, uvažujme písmeno b. Ak $i < k$ potom pre každý stav (i, j) je prechod na písmeno b definovaný. Ak $i' \geq k$, potom pre každý stav (i', j') prechod pre písmeno b nie je definovaný. Stavy (i, j) a (i', j') preto v tomto prípade nie sú ekvivalentné.

   (iii) Ak $i = k$ a zároveň $i' > k$, pričom $j \neq l$, uvažujme písmeno c. Zatiaľ čo pre každý stav (i, j) kde $i = k$ a $j \neq l$ je prechod pre písmeno c definovaný, pre stavy (i', j') kde $i' > k$ je prechod pre písmeno c nedefinovaný. Stavy (i, j) a (i', j') preto nie sú ekvivalentné. Spomeňme si ešte jeden špeciálny prípad a to, ak $i = k$ a $j = l$. V tomto prípade daný stav (i, j) ako jediný stav automatu M akceptuje výlučne prázdne slovo, čo znamená že je neekvivalentný nielen so stavom (i', j'), ale aj so všetkými ostatnými stavmi automatu M.

   (iv) Ak $i > k$ a zároveň $i' > k$, potom $j = j' = 0$. Uvažujme slovo $a^{m-i'}b$. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní prvej časti slova $a^{m-i'}$ dostaneme do stavu $(0, j')$, po prečítaní zvyšku slova b prejdeme do akceptujúceho stavu $(0, 1)$, slovo $a^{m-i'}b$ teda je akceptované. Zo stavu (i, j) po prečítaní prvej časti slova $a^{m-i'}$ prejdeme do stavu $(i+m-i', j')$, ostáva nám teda ešte prečítať písmeno b. Keďže ale vieme, že $i < i'$, potom môžeme s určitosťou povedať že $k < i + m - i' \leq m - 1$ čo znamená, že písmeno b nemá v tomto stave definovaný prechod a teda slovo $a^{m-i'}b$ nie je zo stavu (i, j) akceptované. Stavy (i, j) a (i', j') preto nie sú ekvivalentné.

b) Ak $i = i'$ tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $j < j'$. Uvažujme 2 podprípady:

   (i) Ak $i = i' < k$, uvažujme slovo $b^{n-j'}a$. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní slova dostaneme do stavu $(i'+1, 0)$, teda slovo bude akceptované. Zo stavu (i, j) po prečítaní prvej časti slova $b^{n-j'}$ prejdeme do stavu $(i, (j+n-j') \mod n)$, ostáva nám teda ešte prečítať písmeno a. Keďže ale vieme, že $j < j'$, potom môžeme s určitosťou povedať že $(j + n - j') \mod n \neq 0$ čo znamená, že písmeno a nemá v tomto stave definovaný prechod a teda slovo $b^{n-j'}a$ nie je zo stavu (i, j) akceptované. Stavy (i, j) a (i', j') teda nie sú ekvivalentné.

   (ii) Ak $i = i' = k$, uvažujme slovo $c^{l-j'+1} = c^{l-j'}c$. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní prvej časti slova $c^{l-j'}$ dostaneme do stavu (i', l), ostáva nám prečítať ešte písmeno c. Keďže prechod na c nie je z tohto stavu definovaný, slovo $c^{l-j'+1}$ nie je zo stavu (i', j') akceptované. Zo stavu (i, j) sa po prečítaní slova $c^{l-j'+1}$ dostaneme do akceptujúceho stavu $(i', j + l - j' + 1)$. Z toho vyplýva, že stavy (i, j) a (i', j') nie sú ekvivalentné.

Keďže výsledný automat je minimálny, potom za pomoci čísel k a l je možné vyjadriť každú hodnotu $\alpha = m + k(n-1) + l$, pre ktorú platí predpokladaný vzťah $m + n - 1 \leq \alpha < mn$, pričom číslo k bude označovať požadovaný počet úplných riadkov v súčinovom automate a číslo l bude predstavovať počet stavov v neúplnom riadku nasledujúcom po poslednom úplnom riadku. □

Ukázali sme teda, že správnou voľbou automatov je možné dosiahnuť akúkoľvek zložitosť prieniku od 1 až po mn. Všetky získané a dokázané poznatky si ešte zhrnieme do výslednej vety.

Veta 2.8 *Zložitosť prieniku dvoch jazykov nad ternárnou abecedou akcepto-*

vaných m-stavovým a n-stavovým neúplným DKA so všetkými stavmi koncovými, môže dosahovať každú hodnotu z intervalu $[1, mn]$.

Dôkaz.
Podľa Lemmy 3.1 minimálna zložitosť prieniku m-stavového a n-stavového neúplného DKA je rovná 1.
Podľa Vety 3.2 maximálna zložitosť prieniku m-stavového a n-stavového neúplného DKA je rovná mn.
Podľa Lemmy 2.5 možno pre $m \leq n$ dosiahnuť každú hodnotu od 1 po m.
Podľa Lemmy 2.6 je pre $m \leq n$ možné dosiahnuť všetky hodnoty v rozmedzí od m po $m + n - 1$.
Podľa Lemmy 2.7 je pre $m \leq n$ možné dosiahnuť všetky hodnoty od $m+n-1$ až po mn.

$\square$

Kapitola 3

Zjednotenie automatov so všetkými stavmi koncovými

V tejto kapitole sa budeme venovať zjednoteniu automatov so všetkými stavmi koncovými. Rovnako ako v prípade operácie prienik sa pokúsime dokázať, že minimálna zložitosť tejto operácie je 1 a taktiež nájsť maximálnu zložitosť ktorú je možné dosiahnuť.

3.1 Minimálna zložitosť

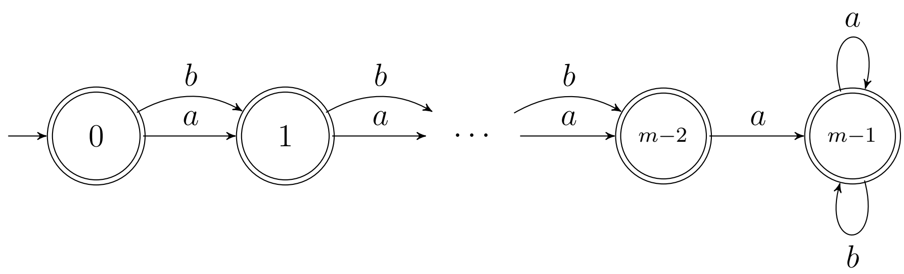
Lemma 3.1 *Nech $m, n \geq 1$, pričom platí $m \leq n$. Potom existujú m-stavový neúplný DKA A a n-stavový neúplný DKA B také, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny neúplný DKA pre jazyk $L(A) \cup L(B)$ má práve 1 stav.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 3.16 kde:
$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_A(i, a) = \begin{cases} i & \text{ak } i = m-1, \\ i+1 & \text{inak,} \end{cases}$$

$$\delta_A(i, b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < m-2, \\ i & \text{ak } i = m-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$

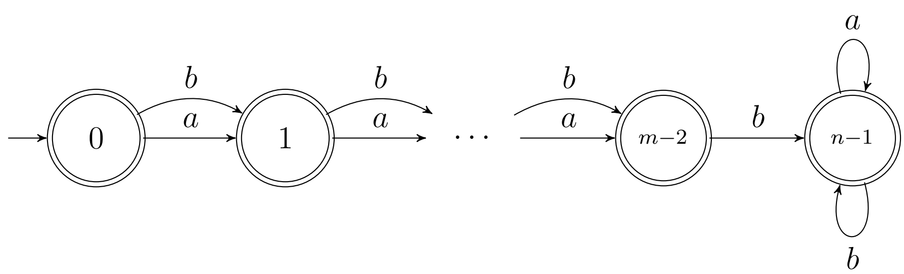


Obr. 3.16: Automat A.

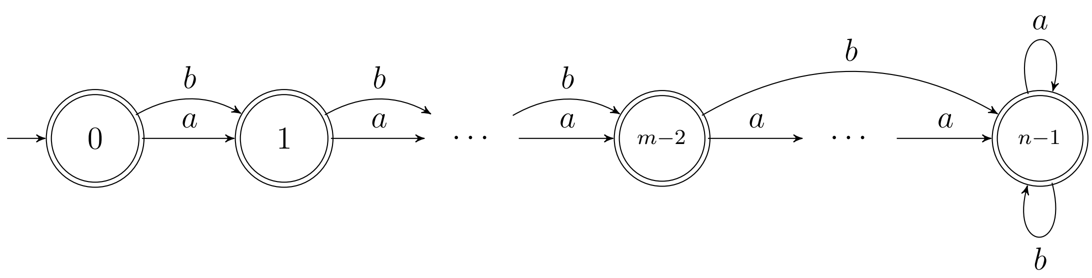
Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 3.17 a Obr. 3.18 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i,a) = \begin{cases} i & \text{ak } i = n-1, \\ i+1 & \text{ak } i < n-2 \text{ a platí } m = n, \\ i+1 & \text{ak } i < n-1 \text{ a platí } m \neq n, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$

$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i & \text{ak } i = n-1, \\ i+1 & \text{ak } i < m-2, \\ n-1 & \text{ak } i = m-2, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$

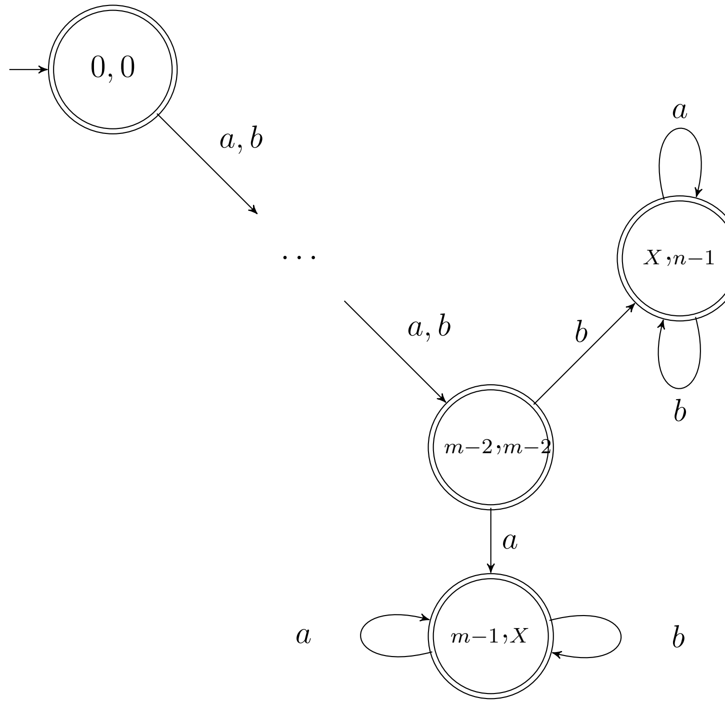


Obr. 3.17: Automat B pre $m = n$.

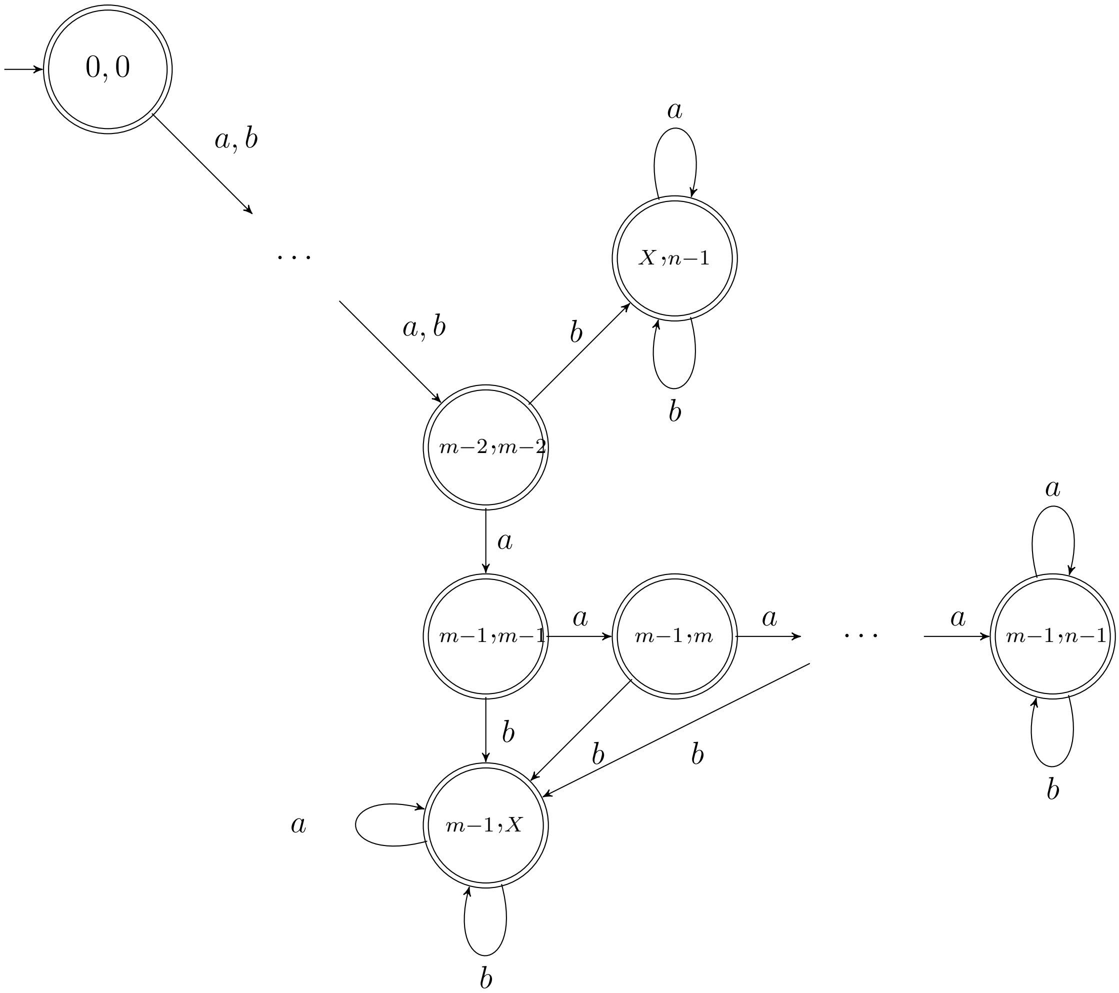


Obr. 3.18: Automat B pre $m \neq n$.

Teraz si zostrojme automat pre zjednotenie $M = (Q, \Sigma, \delta, s, Q)$, viď Obr. 3.19 a Obr. 3.20, pričom $s = (0, 0)$ a $Q = (Q_A \cup X) \times (Q_B \cup X)$.



Obr. 3.19: Automat M pre jazyk $L(A) \cup L(B)$ pre $m = n$.



Obr. 3.20: Automat M pre jazyk $L(A) \cup L(B)$ pre $m \neq n$.

Automat M akceptuje všetky slová t.j. po minimalizácii bude mať práve jeden stav.

□

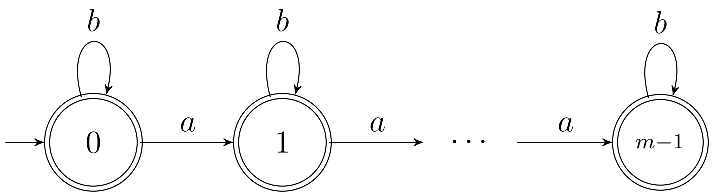
3.2 Maximálna zložitosť

Lemma 3.2 *Nech $m, n \geq 1$, pričom platí $m \leq n$. Potom existujú m-stavový neúplný DKA A a n-stavový neúplný DKA B také, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny neúplný DKA pre jazyk $L(A) \cup L(B)$ má práve $(m+1)(n+1)-1$ stavov.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 3.21 kde:
$Q_A = \{0, 1, \dots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

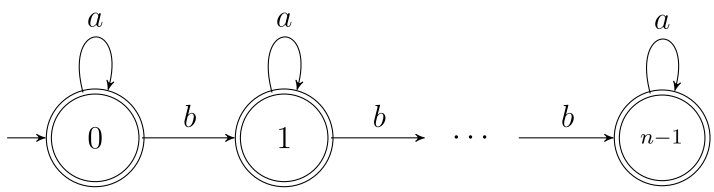
$$\delta_A(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < m-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$
$$\delta_A(i,b) = i.$$



Obr. 3.21: Automat A.

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 3.22 kde:
$Q_B = \{0, 1, \dots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i,a) = i$$
$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak.} \end{cases}$$



Obr. 3.22: Automat B.

Teraz si zostrojme automat pre zjednotenie $M = (Q, \Sigma, \delta, s, Q)$, viď Obr. 3.23, pričom $s = (0, 0)$ a $Q = (Q_A \cup X) \times (Q_B \cup X)$.

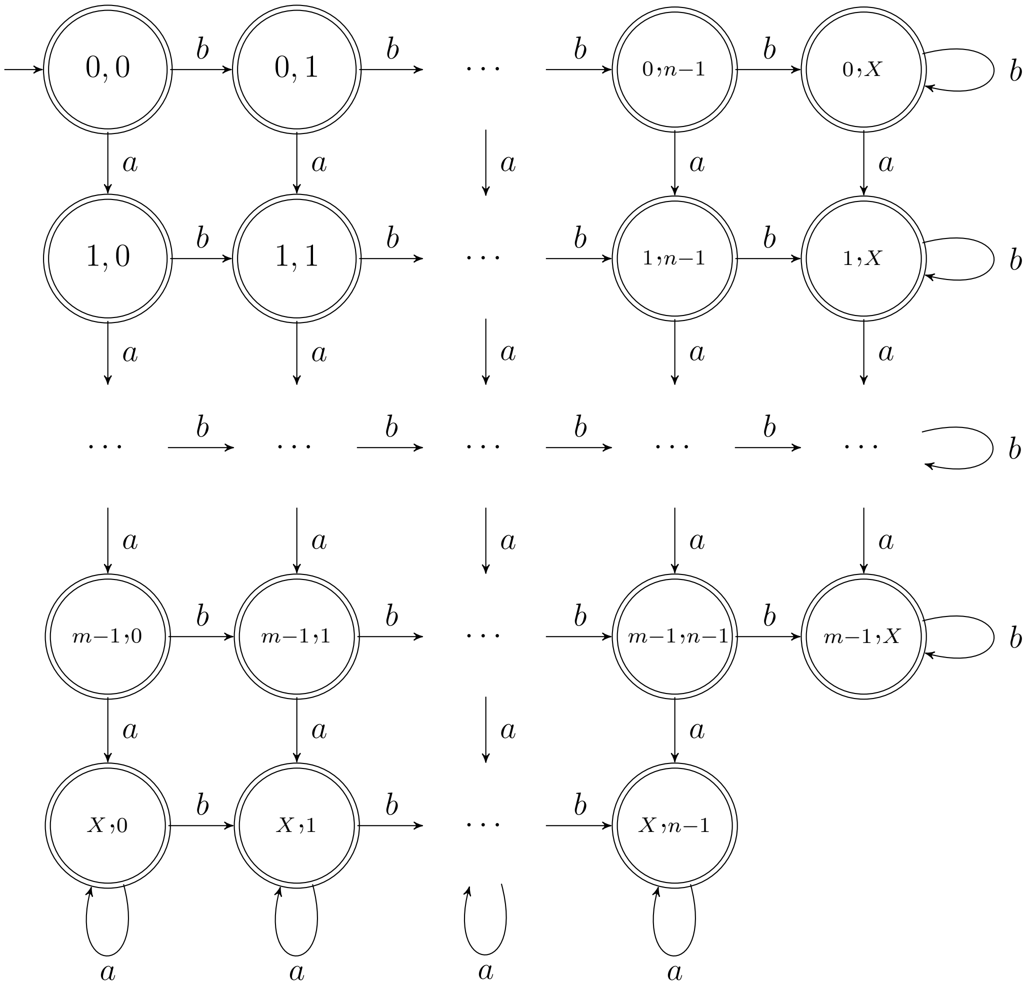
Ďalej musíme ukázať, že automat je skutočne minimálny. Majme stavy (i, j) a (i', j') také, že $(i, j) \neq (i', j')$. Rozdelíme si dôkaz na 2 časti:

1) ak $i \neq i'$ a bez ujmy na všeobecnosti $i < i'$ t.j. stavy sa nachádzajú v rôznych riadkoch. Túto časť si ďalej rozdelíme na 2 prípady:

   a) ak $j, j' \neq X$, teda žiaden so stavov sa nenachádza v poslednom stĺpci. Potom uvažujme slovo $a^{m-i'}b^{n-j'} = a^{m-i'}b^{n-1-j'}b$. Zo stavu (i, j) sa po prečítaní prvej časti slova $a^{m-i'}$ presunieme do stavu $(i + m - i', j)$, čo je s určitosťou akceptujúci stav, ostáva nám prečítať zvyšok slova $b^{n-1-j'}b$. Ak platí $j < j'$, po prečítaní tejto časti slova sa presunieme do akceptujúceho stavu $(i + m - i', j + n - j')$, ak platí $j \geq j'$, potom po prečítaní prejdeme do stavu $(i + m - i', X)$, čo je tiež akceptujúci stav. Slovo $a^{m-i'}b^{n-j'}$ je teda zo stavu (i, j) akceptované. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní prvej časti slova $a^{m-i'}$ presunieme do stavu (X, j'), ostáva nám prečítať zvyšok slova $b^{n-1-j'}b$. Po prečítaní ďalšej časti slova $b^{n-1-j'}$ sa presunieme do stavu $(X, n - 1)$ a zostáva nám dočítať písmeno b. Toto písmeno však z daného stavu nie je akceptované, preto slovo $a^{m-i'}b^{n-j'}$ nie je zo stavu (i', j') akceptované. Stavy (i, j) a (i', j') preto v tomto prípade nie sú ekvivalentné.

   b) ak sa aspoň jeden so stavov nachádza v poslednom stĺpci. Rozdeľme si tento prípad na 2 podprípady:

      i) ak stĺpec j je ľubovoľný a $j' = X$. Uvažujme slovo $a^{m-i'} = a^{m-1-i'}a$. Zo stavu (i, j) sa po prečítaní slova dostaneme do akceptujúceho stavu $(i + m - i', j)$. Zo stavu $(i', j') = (i', X)$ po prečítaní prvej časti slova $a^{m-1-i'}$ prejdeme do stavu $(m - 1, X)$, ostáva nám ešte dočítať písmeno a. Z tohto stavu však prechod na toto písmeno nie je definovaný, slovo $a^{m-i'}$ teda



Obr. 3.23: Automat pre jazyk $L(A) \cup L(B)$.

zo stavu (i', j') nie je akceptované. Stavy (i, j) a (i', j') teda nie sú ekvivalentné.

ii) ak stĺpec j' je ľubovoľný a $j = X$. Uvažujme slovo $a^{m-i} = a^{m-1-i}a$. Zo stavu $(i, j) = (i, X)$ sa po prečítaní prvej časti slova a^{m-1-i} dostaneme do stavu $(m-1, X)$, ostáva nám prečítať ešte písmeno a. Toto písmeno je ale z tohto stavu neakceptované, preto slovo a^{m-i} je zo stavu (i, j) neakceptované. Zo stavu (i', j') po prečítaní slova prejdeme do akceptujúceho stavu (X, j'). Stavy (i, j) a (i', j') teda nie sú ekvivalentné.

2) ak $j \neq j'$ a bez ujmy na všeobecnosti $j < j'$ t.j. stavy sa nachádzajú v rôznych stĺpcoch. Túto časť si ďalej rozdelíme na 2 prípady:

a) ak $i, i' \neq X$, teda žiaden so stavov sa nenachádza v poslednom riadku. Potom uvažujme slovo $b^{n-j'}a^{m-i'} = b^{n-j'}a^{m-1-i'}a$. Zo stavu (i, j) sa po prečítaní prvej časti slova $b^{n-j'}$ presunieme do stavu $(i, j+n-j')$, čo je s určitosťou akceptujúci stav, ostáva nám prečítať zvyšok slova $a^{m-1-i'}a$. Ak platí $i < i'$, po prečítaní tejto časti slova sa presunieme do akceptujúceho stavu $(i+m-i', j+n-j')$, ak platí $i \geq i'$, potom po prečítaní prejdeme do stavu $(X, j+n-j')$, čo je tiež akceptujúci stav. Slovo $b^{n-j'}a^{m-i'}$ je teda zo stavu (i, j) akceptované. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní prvej časti slova $b^{n-j'}$ presunieme do stavu (i', X), ostáva nám prečítať zvyšok slova $a^{m-1-i'}a$. Po prečítaní ďalšej časti slova $a^{m-1-i'}$ sa presunieme do stavu $(m-1, X)$ a zostáva nám dočítať písmeno a. Toto písmeno však z daného stavu nie je akceptované, preto slovo $b^{n-j'}a^{m-i'}$ nie je zo stavu (i', j') akceptované. Stavy (i, j) a (i', j') preto v tomto prípade nie sú ekvivalentné.

b) ak sa aspoň jeden so stavov nachádza v poslednom riadku. Rozdeľme si tento prípad na 2 podprípady:

i) ak riadok i je ľubovoľný a $i' = X$. Uvažujme slovo $b^{n-j'} = b^{n-1-j'}b$. Zo stavu (i, j) sa po prečítaní slova dostaneme do akceptujúceho stavu $(i, j+n-j')$. Zo stavu $(i', j') = (X, j')$ po prečítaní prvej časti slova $b^{n-1-j'}$ prejdeme do stavu $(X, n-1)$, ostáva nám ešte dočítať písmeno b. Z tohto stavu však prechod na toto písmeno nie je definovaný, slovo $b^{n-j'}$ teda zo stavu (i', j') nie je akceptované. Stavy (i, j) a (i', j') teda nie sú ekvivalentné.

ii) ak riadok i' je ľubovoľný a $i = X$, potom uvažujme slovo $b^{n-j} = b^{n-1-j}b$. Zo stavu $(i, j) = (X, j)$ po prečítaní prvej časti slova b^{n-1-j} prejdeme do stavu $(X, n-1)$, ostáva nám ešte dočítať písmeno b. Z tohto stavu však prechod na toto písmeno nie je definovaný, slovo b^{n-j} teda zo stavu (i,j) nie je akceptované. Zo stavu (i',j') sa po prečítaní slova dostaneme do akceptujúceho stavu (i',X). Stavy (i,j) a (i',j') teda v tomto podprípade nie sú ekvivalentné.

$\square$

Veta 3.3 *Zložitosť zjednotenia dvoch jazykov akceptovaných m-stavovým a n-stavovým neúplným DKA so všetkými stavmi koncovými sa pohybuje v intervale* $[1,(m+1)(n+1)-1]$.

Dôkaz.
Podľa Lemmy 3.1 pre každý m-stavový neúplný automat A a každý n-stavový neúplný automat B so všetkými stavmi koncovými existuje automat pre jazyk $L(A) \cup L(B)$, ktorý má práve 1 stav, teda minimálna zložitosť zjednotenia je vždy najmenej 1.
Podľa Lemmy 3.2 pre každé $m,n \geq 1$ existuje m-stavový automat A a n-stavový automat B taký, že automat akceptujúci zjednotenie jazykov $L(A) \cup L(B)$ má práve $(m+1)(n+1)-1$ stavov a teda maximálna zložitosť zjednotenia nemôže byť nižšia ako $(m+1)(n+1)-1$.

$\square$

Kapitola 4

Rozdiel automatov so všetkými stavmi koncovými

V nasledujúcej kapitole budeme skúmať operáciu rozdiel a pokúsime sa stanoviť dolný a horný odhad zložitosti, ktorú môže nadobúdať pre každé prirodzené číslo m a n.

4.1 Minimálna zložitosť

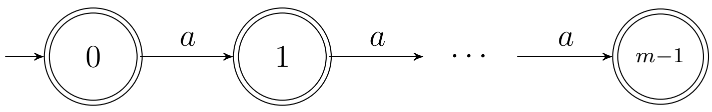
Lemma 4.1 *Nech $m, n \geq 1$. Potom existujú m-stavový neúplný DKA A a n-stavový neúplný DKA B také, že všetky stavy automatov A a B sú koncové a minimálny neúplný DKA pre jazyk $L(A) \setminus L(B)$ má práve 1 stav.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

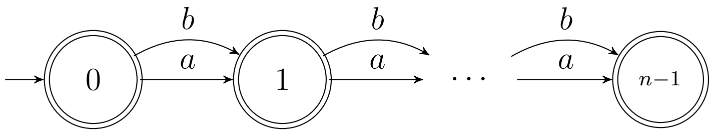
Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 4.24 kde:
$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_A(i, a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < m-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak}, \end{cases}$$
$$\delta_A(i, b) = \textit{nedefinované}.$$

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 4.25 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,



Obr. 4.24: Automat A.

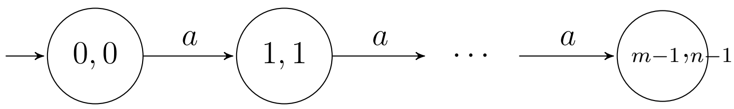


Obr. 4.25: Automat B.

$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$
$$\delta_B(i,b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$

Teraz si zostrojme automat pre rozdiel $M = (Q, \Sigma, \delta, s, Q)$, viď Obr. 4.26, pričom $s = (0,0)$ a $Q = Q_A \times (Q_B \cup X)$.



Obr. 4.26: Automat M pre jazyk $L(A) \setminus L(B)$.

Výsledný automat nemá ani jeden akceptujúci stav, čo znamená, že množina slov akceptovaných z jednotlivých stavov je u všetkých stavov prázdna. Stavy sú teda ekvivalentné a automat možno nahradiť automatom s jedným stavom.

□

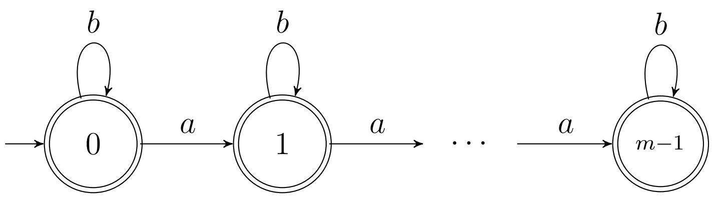
4.2 Maximálna zložitosť

Lemma 4.2 *Nech $m, n \geq 1$. Potom existujú m-stavový neúplný DKA A a n-stavový neúplný DKA B také, že všetky stavy automatov A a B sú koncové* *a minimálny neúplný DKA pre jazyk $L(A) \setminus L(B)$ má práve $mn + m$ stavov.*

Dôkaz.
Popíšme si automaty A a B.

Nech $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, 0, Q_A)$, na Obr. 4.27 kde:
$Q_A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_A(i, a) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < m-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$
$$\delta_A(i, b) = i.$$



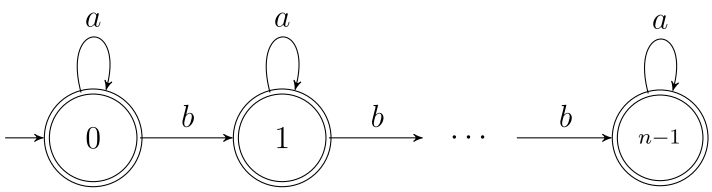
Obr. 4.27: Automat A.

Nech $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, 0, Q_B)$, na Obr. 4.28 kde:
$Q_B = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,
$\Sigma = \{a, b\}$
a prechodová funkcia je definovaná takto:

$$\delta_B(i, a) = i,$$
$$\delta_B(i, b) = \begin{cases} i+1 & \text{ak } i < n-1, \\ \textit{nedefinované} & \text{inak,} \end{cases}$$

Teraz si zostrojme automat pre rozdiel $M = (Q, \Sigma, \delta, s, Q)$, viď Obr. 4.29, pričom $s = (0, 0)$ a $Q = Q_A \times (Q_B \cup X)$.

Ďalej musíme dokázať, že automat M je skutočne minimálny. Majme stavy (i, j) a (i', j') také, že $(i, j) \neq (i', j')$. Keďže koncové a nekoncové stavy sú navzájom prirodzene neekvivalentné, potrebujeme dokázať iba prípady v ktorých sú oba stavy nekoncové alebo naopak, oba stavy koncové. Rozdelíme si teda dôkaz na 2 časti:



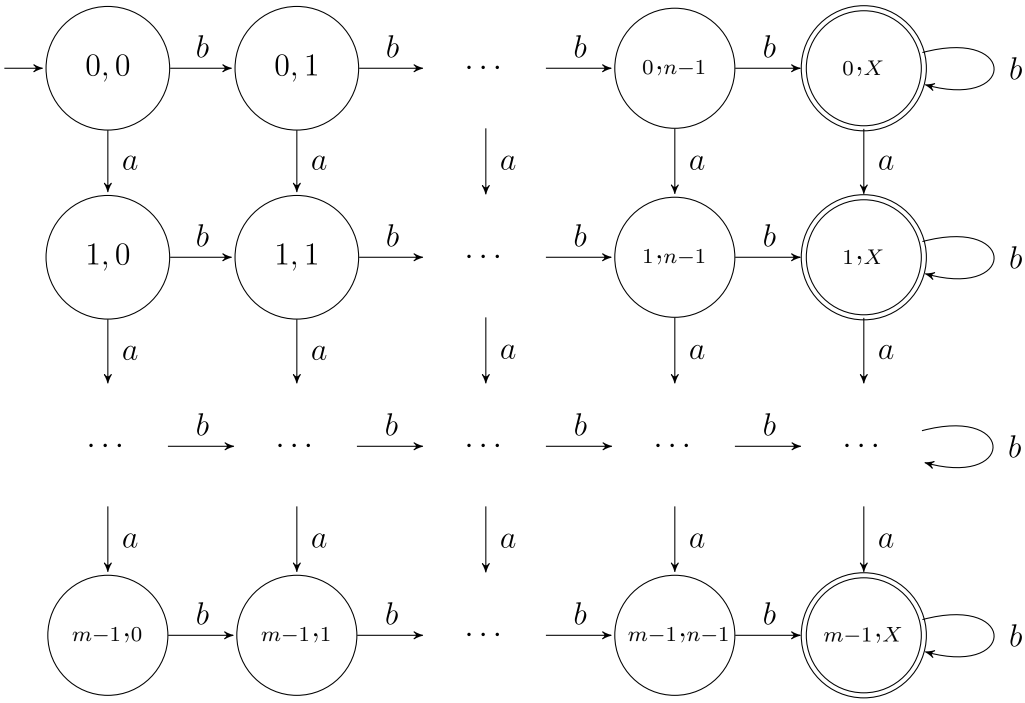
Obr. 4.28: Automat B.

1. oba stavy sú nekoncové t.j. $j \neq X$ aj $j' \neq X$. Tu musíme uvažovať 2 podprípady:
a) ak $j = j'$, potom ale uvažujme, že $i < i'$. Majme slovo $b^{n-j}a^{m-i'} = b^{n-j}a^{m-i'-1}a$. Zo stavu (i, j) sa po prečítaní prvej časti slova b^{n-j} dostaneme do stavu (i, X) a po dočítaní zvyšku slova do stavu $(i + m - i', X)$. Keďže platí $i < i'$, tento stav je s určitosťou akceptujúci. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní prvej časti slova dostaneme do stavu (i', X) a po prečítaní druhej časti slova $a^{m-i'-1}$ do stavu $(m-1, X)$. Ostáva ešte dočítať písmeno a, ktoré ale nemá v tomto stave definovaný prechod. To teda znamená že slovo sa zo stavu (i', j') nedočíta a nebude akceptované. Stavy (i, j) a (i', j') preto v tomto prípade nie sú ekvivalentné.
b) ak $j \neq j'$, bez ujmy na všeobecnosti nech $j < j'$. Potom uvažujme slovo $b^{n-j'}$. Zo stavu (i, j) po prečítaní slova prejdeme do stavu $(i, j + n - j')$ čo je vzhľadom na platnosť vzťahu $j < j'$ určite neakceptujúci stav. Zo stavu (i', j') sa po prečítaní slova dostaneme do akceptujúceho stavu (i', X). Z toho teda vyplýva, že stavy (i, j) a (i', j') sú navzájom neekvivalentné.

2. oba stavy sú koncové t.j. $j = X$ aj $j' = X$. Bez ujmy na všeobecnosti tiež môžeme povedať že $i < i'$. Uvažujme slovo $a^{m-i'} = a^{m-i'-1}a$. Zo stavu (i, X) sa po prečítaní slova dostaneme do stavu $(i+m-i', X)$, čo je vzhľadom na platnosť vzťahu $i < i'$ určite akceptujúci stav. Zo stavu (i', X) však po prečítaní prvej časti slova prejdeme do stavu $(m-1, X)$, ostáva dočítať ešte písmeno a. Prechod na toto písmeno však z tohto stavu nie je definovaný, slovo preto nie je zo stavu (i', j') akceptované. To však znamená, že stavy (i, j) a (i', j') nie sú ekvivalentné.

$\square$

Veta 4.3 *Zložitosť rozdielu dvoch jazykov akceptovaných m-stavovým a n-stavovým neúplným DKA so všetkými stavmi koncovými dosahuje hodnoty z intervalu* $[1, mn + m]$.



Obr. 4.29: Automat M pre jazyk $L(A) \setminus L(B)$.

Dôkaz.
Podľa Lemmy 4.1 pre každý m-stavový neúplný automat A a každý n-stavový neúplný automat B so všetkými stavmi koncovými existuje automat pre jazyk $L(A) \setminus L(B)$, ktorý má práve 1 stav, teda minimálna zložitosť rozdielu je vždy najmenej 1.
Podľa Lemmy 4.2 pre každé $m, n \geq 1$ existuje m-stavový automat A a n-stavový automat Btaký, že automat akceptujúci rozdiel jazykov $L(A) \setminus L(B)$ má práve $mn + m$ stavov a teda maximálna zložitosť rozdielu nemôže byť nižšia ako $mn + m$.

$\square$

Záver

V tejto práci sme sa venovali popisnej zložitosti prieniku na neúplných automatoch so všetkými stavmi koncovými. V prvej časti sme vychádzajúc z definície prieniku a doterajších výskumov vyslovili horný odhad tejto zložitosti. Podarilo sa nám ukázať, že maximálna možná zložitosť prieniku neúplného m-stavového a neúplného n-stavového automatu so všetkými stavmi koncovými je mn a túto hranicu už nemožno znížiť. Určili sme tiež dolnú hranicu zložitosti, kde sa ukázalo, že stačí vybrať akékoľvek dva automaty reprezentujúce dva navzájom disjunktné jazyky a zložitosť prieniku bude v takomto prípade vždy rovná 1.

Ďalej sa nám tiež podarilo dokázať, že je možné dosiahnuť každú hodnotu α v rozpätí $1 \leq \alpha \leq mn$, čo znamená, že pre každé α existujú m-stavový neúplný DKA a n-stavový neúplný DKA so všetkými stavmi koncovými také, že zložitosť ich prieniku bude rovná α. Je potrebné poznamenať, že zatiaľ čo pri dokazovaní hornej a dolnej hranice nám stačilo použiť binárnu abecedu, dosiahnutie niektorých hodnôt z tohto rozsahu si vyžiadalo rozšírenie abecedy na ternárnu.

Okrem toho sa nám podarilo nájsť dolný a horný odhad zložitosti operácií zjednotenie a rozdiel, ktorý bol dokázaný ako korektný bez ohľadu na počet stavov vstupných automatov.

Zoznam použitej literatúry

[1] Câmpeanu, C., Culik II, K., Salomaa, K., Yu, S.: State complexity of basic operations on finite languages. In: Boldt, O., Jürgensen, H. (eds.) WIA'99, LNCS, vol. 2214, pp. 60–70. Springer Heidelberg (2001)

[2] Câmpeanu, C., Salomaa, K., Yu, S.: Tight lower bound for the state complexity of shuffle of regular languages. J. Autom. Lang. Comb. 7, 303–310 (2002)

[3] Hromkovič, J.: Descriptional complexity of finite automata: Concepts and open problems. J. Autom. Lang. Comb. 7, 519–531 (2002)

[4] Jirásková, G., Okhotin, A.: State complexity of cyclic shift. RAIRO Theor. Inform. Appl. 42, 335–360 (2008)

[5] Kao, J., Rampersad, N., Shallit, J.: On NFAs where all states are final, initial, or both. Theor. Comput. Sci. 410(47-49), 5010-5021 (2009)

[6] Maslov, A.N.: Estimates of the number of states of finite automata. Soviet Math. Dokl. 11, 1373–1375 (1970)

[7] Pighizzini, G., Shallit, J.: Unary language operations, state complexity and Jacobsthal's function. Internat. J. Found. Comput. Sci. 13, 145–159 (2002)

[8] Shallit, J.: A second course in formal languages and authomata theory. Cambridge University Press. New York. USA. 87 (2009)

[9] Yu, S.: A renaissance of automata theory? Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. 72, 270–272 (2000)

[10] Yu, S., Zhuang, Q., Salomaa, K.: The state complexity of some basic operations on regular languages. Theoret. Comput. Sci. 125, 315–328 (1994)