Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Prírodovedecká fakulta

VYHĽADÁVANIE FORMÁLNYCH KONCEPTOV NAD HETEROGÉNNYMI TABUĽKOVÝMI DÁTAMI POMOCOU FORMÁLNYCH KONCEPTOV DRUHÉHO RÁDU

ŠTUDENTSKÁ VEDECKÁ KONFERENCIA

Študijný odbor:	Informatika
Školiace pracovisko:	Ústav informatiky
Vedúci záverečnej práce:	RNDr. Ondrej Krídlo, Phd.

Prešov 2015

Bc. Matej Aštary

Abstrakt

Jednou z metód data-miningu je formálna konceptová analýza, ku ktorej chceme prispieť v tejto práci novým prístupom vyhľadávania konceptov v heterogénnych kontextoch pomocou formálnej konceptovej analýzy druhého rádu. Poznáme viaceré prístupy vyhľadávania konceptov v dátach, ktoré pracujú na vstupe s klasickým homogénnym kontextom, ale aj s atribútovo-heterogénnym kontextom. Prirodzene sa teda vynára otázka, ako sa vysporiadať s heterogénnym kontextom, v ktorom nielen každý atribút môže byť fuzzifikovaný inak, nezávisle od ostatných, ale aj každý objekt, či každá hodnota relácie medzi objektom a atribútom.

Abstract

Formal concept analysis is one of the data-mining methods. The aim of this thesis is to contribute to this method with new heterogeneous access. We can distinguish several ways how to search concepts in data that work on input with homogeneous fuzzy context and also with attribute-heterogeneous fuzzy context. Therefore, there is an obvious question how to deal with heterogeneous fuzzy context in which every object, every attribute and also every relation between them can be fuzzified differently independently of the others arises.

Obsah

Zoznam tabuliek

Úvod

Dnes už málokto pracuje s dôležitými údajmi, ktoré sú spísané iba na papieri. Ľudia majú potrebu zhromažďovať rôzne informácie a mať pri tom istotu, že o ne neprídu a budú ich môcť kedykoľvek použiť. Predstavme si napríklad evidenciu občanov v krajine, evidenciu vozidiel či evidenciu pacientov u lekára, kde je riskantné uchovávať informácie len kdesi na hárkoch papiera založených v kartotéke. Práve v dôsledku toho dnešný svet stojí na databázach, do ktorých môžeme ukladať dáta a následne s nimi pracovať kedykoľvek (ak samozrejme vynecháme možnosť, že skrachuje server) to potrebujeme. Uložené dáta však môžu obsahovať aj informácie alebo akési súvislosti, ktoré na prvý pohľad nemusia byť pri vkladaní údajov viditeľné. Niektoré záznamy môžu byť rovnaké alebo aspoň podobné a tvoria tak prirodzené zhluky. Budeme ich nazývať koncepty. Vyhľadávanie takýchto skrytých vzťahov, teda konceptov v dátach potom môže byť v mnohých prípadoch veľmi užitočné. Vyhľadávaním konceptov v dátach sa zaoberá formálna konceptová analýza.

V dnešnej dobe existuje niekoľko známych metód alebo algoritmov na vyhľadávanie konceptov tak ako v homogénnych dátach, tak aj v atribútovo-heterogénnych dátach, ktoré sme priniesli v bakalárskej práci. Prirodzene by nás mohlo zaujímať, čo s kontextami, ktorých nie každý objekt, atribút a ani hodnota relácie medzi nimi je toho istého typu (resp. nad tou istou fuzzy logikou). Preto naša práca prináša okrem popisu už známych algoritmov a ich praktického využitia pre takéto vyhľadávanie takisto vlastný prístup a rozšírenie myšlienok algoritmov aj pre vyhľadávanie konceptov v heterogénnych dátach, kde každý objekt, atribút aj hodnota relácie môžu byť fuzzifikované inak.

Kapitola 1

Formálna konceptová analýza a jej zovšeobecnenia

V práci sa zaoberáme formálnou konceptovou analýzou. Jej predmetom sú tabuľkové dáta, ktoré spĺňajú kritériá objektovo-atribútového modelu. Riadky tabuľky sú reprezentované databázovými položkami (objektmi) a stĺpce vlastnosťami (atribútmi) týchto databázových položiek. V tejto kapitole si ukážeme základné princípy, pojmy a definície z oblasti formálnej konceptovej analýzy, ktorej metódou je analýza dát, ktoré popisujú určité vzťahy medzi skupinami objektov a skupinami atribútov. Každá skupina objektov je príznačná istými spoločnými znakmi odlišujúcimi sa od ostatných. Vytvára tak akési zhluky, ktoré sú vyhľadávané formálnou konceptovou analýzou ako jednou z metód data-miningu. Ukážeme si klasický dvojhodnotový prístup a takisto jeho rozšírenie na fuzzifikované prístupy, pričom ich budeme ilustrovať náležitými príkladmi.

1.1 Klasický prístup

Formálna konceptová analýza vznikla ako aplikovaná teória zväzov v 80.tych rokoch 20. storočia. Jej zakladateľmi sú Rudolf Wille a Bernhard Ganter, ktorí ju definujú v práci [2], pričom pracujú s dvojhodnotovou logikou, s tzv. crisp údajmi typu áno-nie. Základné pojmy formálnej konceptovej analýzy sú formálny kontext a formálny koncept.

Definícia 1.1.1 (Formálny kontext) *Formálny kontext* alebo skrátene *kontext* nazývame každú trojicu $\langle B, A, R\rangle$, kde A a B sú neprázdne množiny a $R \subseteq B \times A$ je binárna relácia. Prvky množiny B nazývame objekty, prvky množiny A nazývame atribúty a R je incidenčná binárna relácia predstavujúca vzťah medzi spomínanými množinami. $(b, a) \in R$ predstavuje fakt, že objekt b spĺňa, resp. má daný atribút a, alebo že atribút a je zdieľaný objektom b.

Príkladom môže byť tabuľka 1.1. Množinu objektov budú tvoriť futbalisti alebo lepšie chlapci, ktorí by radi hrali futbal v budúcnosti.

$$B = \{ \text{ Martin, Jozef, Ľuboš, Pavol, Tibor } \}.$$

Atribútmi budú ich úlohy v tíme alebo lepšie povedané posty, ktoré hráči môžu zastávať na ihrisku.

$A = \{$ CD - stredný obranca, SD - krajný obranca, CDM - stredný defenzívny záložník, SM - krajný záložník, CM - stredný ofenzívny záložník, FW - útočník $\}$.

Incidenčnú reláciu bude tvoriť postoj futbalistov k daným postom, čo vyjadruje tabuľka 1.1:

- Ak postoj futbalistu b k postu a je kladný, tak $(b, a) \in R$
- Ak postoj futbalistu b k postu a je záporný, tak $(b, a) \notin R$

	CD	SD	DM	SM	CM	FW
Martin	×	×	×			
Jozef	×				×	×
Ľuboš	×	×	×	×	×	
Pavol	×	×	×	×	×	
Tibor				×	×	×

Tabuľka 1.1: Formálny kontext

V tabuľke 1.1 si môžme všimnúť, že napríklad Martin by rád hral na poste stredného alebo krajného obrancu, ba dokonca aj na poste stredného defenzívneho záložníka. Vo všeobecnosti mu zrejme imponujú obranné činnosti. Naopak nie sú mu príjemné útočné posty a nechel by byť útočníkom, ofenzívnym záložníkom ani krajným záložníkom. Ak sa pozrieme na Ľuboša a Pavla, tak obom nerobí problém takmer

žiaden post. Jediný post, ku ktorému majú záporný vzťah, je post útočníka. Tibor nemá v obľube defenzívne činnosti. Zrejme by rád útočil a dával góly.
V takýchto údajoch je možné hľadať takzvané koncepty. Teda chlapcov zatriedených do skupín s podobnými vlastnosťami alebo záľubami. Zadefinujme si, čo je to formálny koncept.

Definícia 1.1.2 (Formálny koncept) *Formálny koncept* (skrátene *koncept*) kontextu $\langle B, A, R\rangle$ nazývame každú dvojicu $\langle X, Y\rangle$, kde $X \subseteq B$, $Y \subseteq A$, pričom platí, že $Y = \uparrow(X)$ a $X = \downarrow(Y)$, kde $\uparrow(X) : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ a $\downarrow(Y) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ sú zobrazenia definované nasledovne:

$$\uparrow(X) = \{\ a \in A : (\forall b \in X)(b, a) \in R\ \}$$
$$\downarrow(Y) = \{\ b \in B : (\forall a \in Y)(b, a) \in R\ \}.$$

Zobrazenie $\uparrow$ teda ľubovoľnej množine objektov X priradí najväčšiu možnú množinu atribútov zdieľaných všetkými objektami zo vstupnej množiny X. Naopak, zobrazenie $\downarrow$ priradí ľubovoľnej množine atribútov Y najväčšiu možnú množinu objektov, ktoré spĺňajú všetky atribúty z Y. Zobrazenia $\uparrow$ a $\downarrow$ tvoria takzvanú Galoisovu konexiu medzi úplnými zväzmi všetkých podmnožín množín objektov a atribútov usporiadaných vzhľadom na množinovú inklúziu. To znamená, že zobrazenia $\uparrow$, $\downarrow$ spĺňajú nasledovné štyri vlastnosti:

a) Ak $X_1 \subseteq X_2$, tak $\uparrow(X1) \supseteq \uparrow(X_2)$.

b) Ak $Y_1 \subseteq Y_2$, tak $\downarrow(Y1) \supseteq \downarrow(Y_2)$.

c) $X \subseteq \downarrow(\uparrow(X))$.

d) $Y \subseteq \uparrow(\downarrow(X))$.

Vlastnosť a) popisuje prirodzenú vlastnosť, že čím viac objektov si zvolíme na pozorovanie, tým menej nájdeme atribútov, ktoré sú spoločné pre dané objekty.
Vlastnosť b) naopak hovorí, že čím viac vlastností (atribútov) si vyžiadame, tým menej objektov nájdeme takých, ktoré dané vlastnosti budú spĺňať.
Vlastnosti c) a d) nám hovoria, že pri oboch zloženiach týchto zobrazení sa žiadne objekty a ani atribúty nestratia.
Dôkaz, že $\langle\uparrow, \downarrow\rangle$ tieto vlastnosti spĺňa, je ukázaný v práci [1].
Známym faktom teórie zväzov je, že zloženie zobrazení spĺňajúce vlastnosti Galoisovej

konexie je uzáverovým operátorom, teda že spĺňa tieto vlastnosti. Formálne koncepty teda môžeme vnímať jednak ako pevné body Galoisovej konexie alebo ako páry množín objektov a atribútov navzájom uzavretých vzhľadom na zloženia $\downarrow \circ \uparrow$ a $\uparrow \circ \downarrow$.

Vezmime si ako príklad tabuľku 1.1. Zobrazenie $\uparrow$ priradí všetkým objektom, ktoré vyberieme, všetky atribúty, ktoré sú pre nich spoločné. Pre nami vytvorenú tabuľku napríklad $\uparrow$\{Martin, Ľuboš, Pavol\} = \{CD, SD, DM\} a $\uparrow$\{Tibor, Jozef\} = \{CM, FW\}. Na druhej strane $\downarrow$ priradí atribútom, ktoré vyberieme, všetky objekty majúce dané atribúty. Čiže v našom prípade $\downarrow$\{CD, SD, DM\} = \{Martin, Ľuboš, Pavol\} a $\downarrow$\{CM, FW\} = \{Tibor, Jozef\}.

Takéto symetrické vzťahy ako napríklad medzi skupinou hráčov Martinom, Ľubošom, Pavlom a skupinou atribútov CD, SD a DM, nám vytvárajú pozoruhodné celky, ktoré sú príznačné svojimi vlastnosťami pre dané objekty. V tomto prípade všetci traja hráči Martin, Ľuboš aj Pavol radi hrajú na postoch stredného obrancu, krajného obrancu a stredného defenzívneho záložníka. Vytvárajú tak koncept, z ktorého môžeme vyčítať, že všetci traja majú radi defenzívne činnosti, ba dokonca môžeme predpokladať, že všetci traja by mohli vytvoriť obrannú formáciu v nejakom mužstve. Na druhej strane koncept, ktorý vytvárajú Tibor a Jozef budeme môcť nazvať ako nejakú skupinu útočníkov, či strelcov vzhľadom na to, že majú radi útočné činnosti. Je prirodzené, že v podobných kontextoch sa môžu vyskytovať aj koncepty, ktoré síce dokážeme formálne popísať, ale nedokážeme im priradiť jasné pomenovanie. Keďže máme n objektov, je možné z nich vytvoriť 2^n podmnožín a pre každú z nich hľadať jej prislúchajúci koncept. Je zrejmé, že potom nie všetky koncepty musia byť zmysluplné natoľko, aby sme im vedeli dať meno.

Koncepty môžeme na základe množinového usporiadania ich extentov a intentov usporiadať. Na základe usporiadania potom definujeme konceptový zväz. Konceptový zväz je úplný zväz, čo plynie z ďalšieho známeho faktu o usporiadaní uzavretých množín, keďže extenty a intenty formálnych konceptov sú uzavreté množiny.

Definícia 1.1.3 (Konceptový zväz) Nech $\langle X_1, Y_1 \rangle$ a $\langle X_2, Y_2 \rangle$ sú koncepty. Ak $X_1 \subseteq X_2$ (alebo ekvivalentne $Y_1 \supseteq Y_2$), tak zapisujeme, že $\langle X_1, Y_1 \rangle \leq \langle X_2, Y_2 \rangle$. Potom usporiadanú množinu $\langle \{\langle X, Y \rangle : \uparrow (X) = Y, \downarrow (Y) = X\}, \leq \rangle$ nazývame *konceptový zväz* s označením $\mathrm{CL}(B, A, R)$.

Konceptový zväz je teda usporiadaná množina všetkých konceptov. O úplnosti konceptového zväzu hovorí základná veta o konceptových zväzoch.

Veta 1.1.1 (Základná veta o konceptových zväzoch) Základná veta o konceptových zväzoch hovorí o 2 vlastnostiach:

1. Konceptový zväz $\mathrm{CL}(B, A, R)$ je úplný zväz, v ktorom platí:

$$\bigwedge_{i \in I} \langle X_i, Y_i \rangle = \left\langle \bigcap_{i \in I} X_i, \uparrow \left(\downarrow \left(\bigcup_{i \in I} Y_i \right) \right) \right\rangle$$

   a

$$\bigvee_{i \in I} \langle X_i, Y_i \rangle = \left\langle \downarrow \left(\uparrow \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \right), \bigcap_{i \in I} Y_i \right\rangle.$$

2. Úplný zväz $\langle V, \preceq \rangle$ je izomorfný s $\mathrm{CL}(B, A, R)$ práve vtedy, keď existujú zobrazenia $\alpha : A \to V$ a $\beta : B \to V$ také, že platí:

   1a $\alpha[A]$ je infimovo hustá (t. j. každý prvok V je infimom niektorej jej podmnožiny).

   1b $\beta[B]$ je suprémovo hustá (t. j. každý prvok V je suprémom niektorej jej podmnožiny).

   2 Pre každé $a \in A$ a $b \in B$ platí

$$\alpha(a) \succeq \beta(b) \text{ práve vtedy, keď } \langle a, b \rangle \in R.$$

   Navyše špeciálne $\langle V, \preceq \rangle$ je izomorfný s $\mathrm{CL}(V, V, \leq)$.

Základná veta o konceptových zväzoch v stručnosti hovorí, že každému formálnemu kontextu prislúcha nejaký úplný zväz formálnych konceptov, teda jej konceptový zväz. Jej druhá časť zase poukazuje na fakt, že každému úplnému zväzu prislúcha nekonečne veľa formálnych kontextov.

1.2 Fuzzy prístup

V predošlej podkapitole sme ukázali formálnu konceptovú analýzu s klasickým prístupom, ktorý je tvorený tzv. crisp hodnotami typu *áno-nie* alebo *pravda-nepravda*. Existuje však aj fuzzy prístup, v ktorom neuvažujeme len dve hodnoty$\{0, 1\}$, ale pripúšťame aj ďalšie hodnoty, napríklad z intervalu [0,1]. Budeme ich volať fuzzy hodnoty. Ak sme v klasickom prístupe ukázali tabuľku 1.1, kde objektami boli možno budúci futbalisti, atribútmi boli posty hráčov na ihrisku a reláciou medzi nimi boli údaje, či daný hráč rád hráva na danom poste alebo nie, tak teraz môžeme uvažovať hodnoty, ktoré by mohli ukazovať ich schopnosti, ktorými disponujú pri danej úlohe na ihrisku. Ak je hráč excelentný na danom poste, tak bude ohodnotený jednotkou, výborný hodnotou 0.75, priemerný hodnotou 0.5, slabý hodnotou 0.25 a veľmi zlý hodnotou 0.

	CD	SD	DM	SM	CM	FW
Martin	1	1	1	0.5	0.75	0.75
Jozef	0.75	0.5	0.5	0.5	0.75	1
Ľuboš	1	0.75	0.75	0.75	0.25	0.25
Pavol	1	1	0.75	0.5	0.75	0.25
Tibor	0.5	0.5	0.5	0.5	0.75	1

Tabuľka 1.2: Formálny fuzzy kontext

Je ľahké vidieť, že tabuľka 1.2 nezodpovedá definícii formálneho kontextu v klasickom prístupe. Vzhľadom na to, že je potrebné pracovať s fuzzy hodnotami, je potrebné uvaovať inú, než Booleovskú algebru. Pre spracovanie takýchto fuzzy tabuľkových dát použijeme teoretické výsledky pochádzajúce od prof. Bělohlávka z Univerzity Palackého v Olomouci. K tomu, aby bolo možné s takýmito dátami plnohodnotne pracovať použil oveľa abstraktnejšu štruktúru definovanú ako úplný reziduovaný zväz.

Definícia 1.2.1 (Úplný reziduovaný zväz) *Úplným reziduovaným zväzom* nazývame štruktúru $\langle L, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, ktorá spĺňa nasledovné podmienky:

1. $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ je úplný zväz
2. $\langle L, \otimes, 1\rangle$ je komutatívny monoid
   - $\otimes$ je izotónna v oboch argumentoch
   - $\otimes$ je komutatívna a asociatívna
   - $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$
3. binárne spojky $\otimes$ a $\rightarrow$ tvoria tzv. adjungovaný pár, t.j. $x \otimes y \leq z$, práve vtedy keď $x \leq y \rightarrow z$
   - $\rightarrow$ je izotónna v prvom a antitónna v druhom argumente.

V tejto sekcii hovoríme o fuzzy prístupe, v ktorom sa využívajú binárne spojky a to konkrétne konjunkcia $\otimes$ a implikácia $\rightarrow$. V našej práci budeme využívať Lukasiewiczovu algebru a jej definície fuzzy konjunkcie a fuzzy implikácie.

Nech L je konečná množina hodnôt z intervalu $[0, 1]$. Fuzzy konjunkcia a fuzzy implikácia sú definované nasledovne:

- fuzzy konjunkcia: $x \otimes y = \max\{0, x + y - 1\}$
- fuzzy implikácia: $x \to y = \min\{1 - a + b, 1\}$

Tabuľka 1.2 nezodpovedá definícii formálneho kontextu v klasickom prístupe. Formálny fuzzy kontext je definovaný nasledovne:

Definícia 1.2.2 (Formálny fuzzy kontext) *Formálny fuzzy kontext* alebo skrátene *fuzzy kontex*t je daný trojicou $\langle B, A, r \rangle$, kde $r : B \times A \to L$, A a B sú neprázdne množiny, pričom prvky množiny B nazývame objekty a prvky množiny A nazývame atribúty. L je úplný reziduovaný zväz r nazývame incidenčná fuzzy binárna relácia. $r(b, a)$ vyjadruje hodnotou z L, ako veľmi objekt b spĺňa atribút a, resp. ako veľmi je atribút a zdieľaný objektom b.

Vo fuzzifikovanom prístupe prirodzene vzniká potreba predefinovať operátory $\uparrow, \downarrow$, pomocou ktorých definujeme formálne koncepty. Bělohlávek vo svojej práci [3] ich definoval nasledovne:

Definícia 1.2.3 (fuzzy derivačné operátory $\downarrow, \uparrow$) Nech $\langle B, A, r \rangle$ je formálny fuzzy kontext, $\langle L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ je kompletný reziduovaný zväz a nech $f : B \to L$ a $g : A \to L$. Zobrazenia $\uparrow : L^B \to L^A$ a $\downarrow : L^A \to L^B$ sú definované:

$$\uparrow (f)(a) = \bigwedge_{b \in B} (f(b) \to r(b, a))$$

$$\downarrow (g)(b) = \bigwedge_{a \in A} (g(a) \to r(b, a)),$$

kde f je ľubovoľná fuzzy množina objektov $f : B \to L$ a g je ľubovoľná množina atribútov $g : A \to L$.

Vzhľadom na nové zobrazenia $\uparrow, \downarrow$ môžeme konečne definovať aj formálny fuzzy koncept.

Definícia 1.2.4 (Formálny fuzzy koncept) *Formálny fuzzy koncept* (alebo skrátene *fuzzy koncept*) kontextu $\langle B, A, r\rangle$ nazývame ľubovoľnú dvojicou fuzzy množin objektov a atribútov $\langle f, g\rangle$, kde $f \in L^B$, $g \in L^A$, pričom platí, že $g = \uparrow(f)$ a takisto $f = \downarrow(g)$.

Objektovú časť f budeme opäť nazývať *extent* a atribútovú časť g *intent.* Tieto zobrazenia opäť tvoria Galoisovu konexiu medzi úplnými zväzmi všetkých fuzzy podmnožín množiny objektov a atribútov usporiadaných vzhľadom na fuzzy množinovú inklúziu. Je známym faktom, že pevné body Galoisovej konexie tvoria úplný zväz, ktorý v našom prípade budeme nazývať *(obojstranne) fuzzy konceptový zväz.* Tento prístup nie je nič iné, než zovšeobecnením klasického (dvojhodnotového) prístupu, čoho demonštráciou je reziduovaný zväz $\langle\{0{,}1\}, B_\vee, B_\wedge, B_\wedge, B_\rightarrow, 0, 1\rangle$, kde B_* sú príslušné booleovské funkcie. Klasické množiny objektov alebo atribútov v tomto prípade chápeme ako ich charakteristické funkcie.

Definícia 1.2.5 ((Obojstranne) Fuzzy konceptový zväz) Nech dvojice $\langle f_1, g_1\rangle$ a $\langle f_2, g_2\rangle$ sú fuzzy koncepty fuzzy kontextu $\langle B, A, r\rangle$. Ak $f_1 \subseteq f_2$ (alebo ekvivalentne $g_1 \supseteq g_2$), tak zapisujeme, že $\langle f_1, g_1\rangle \leq \langle f_2, g_2\rangle$.
Potom usporiadanú množinu $\langle\{\langle f, g\rangle : \uparrow(f) = g, \downarrow(g) = f\}, \leq\rangle$ nazývame *(obojstranne) fuzzy konceptový zväz* s označením $\mathrm{FCL}(B, A, r)$.

1.3 Jednostranná fuzzifikácia doc. Krajčiho

doc. Krajči rozšíril vo svojej práci [1] klasický prístup na jednostranne fuzzifikovaný prístup. Hovoríme o jednostrannej fuzzifikácii, pretože fuzzifikovaná je len atribútová časť konceptu. Objektová časť je ponechaná v dvojhodnotovej logike. V tejto podkapitole ukazujeme práve tento prístup ako vyhľadávať jednostranné fuzzy koncepty v takýchto jednostranne fuzzifikovaných kontextoch.

Opäť sa pozrime na náš príklad s nádejnými futbalistami a postami, ktoré môžu zastávať na ihrisku a tabuľku 1.2, v ktorej sú uvedené schopnosti hráčov na daných postoch.

	CD	SD	DM	SM	CM	FW
Martin	1	1	1	0.5	0.75	0.75
Jozef	0.75	0.5	0.5	0.5	0.75	1
Ľuboš	1	0.75	0.75	0.75	0.25	0.25
Pavol	1	1	0.75	0.5	0.75	0.25
Tibor	0.5	0.5	0.5	0.5	0.75	1

Tabuľka 1.2: Formálny fuzzy kontext

Množinu objektov B tvoria chlapci, ktorí by sa radi stali futbalistami:

$$B = \{ \text{ Martin, Jozef, Ľuboš, Pavol, Tibor } \}.$$

Množinu atribútov A tvoria herné činnosti alebo posty, ktore môžu zastávať:

$$A = \{ \text{ CD, SD, DM, SM, CM, FW } \}.$$

Relácia R bude tvorená vyjadrením schopností hráčov na daných postoch tak ako v podkapitole 1.2:

$$L = \{ \text{ 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 } \}.$$

Definície zobrazení $\uparrow$ a $\downarrow$ sú vzhľadom na fuzzifikáciu atribútov modifikované tak, aby pracovali s fuzzy podmnožinami množiny atribútov. Pozrime sa na ich vyjadrenia:

Ak $X \subseteq B$, tak $\uparrow(X)$ je funkcia z A do [0,1] taká, že pre každý atribút a platí

$$\uparrow(X)(a) = \inf\{ \ r(b,a) : b \in X \ \}$$

Ak f: $A \to [0,1]$, tak

$$\downarrow(f) = \{ \ b \in B : (\forall a \in Y) r(b,a) \geq f(a) \ \}.$$

Znovu platí, že zobrazenia $\uparrow$ a $\downarrow$ tvoria Galoisovu konexiu. V tomto prípade ale medzi úplnými zväzmi na jednej strane všetkých klasických podmnožín množiny objektov a na strane druhej všetkých fuzzy podmnožín množiny atribútov. Krajči to dokazuje v práci [1].

Funkcia $\uparrow(X)$ priradí každému atribútu maximálne spodné ohraničenie hodnôt tohto atribútu vo všetkých objektoch z X. To znamená, že pre fuzzifikovaný kontext (Tabuľka 1.2) máme napríklad:

$\uparrow$\{Martin, Ľuboš\} (CD) $=$ inf$\{r$(CD, Martin), r(CD, Ľuboš)$\}$ $=$ inf$\{1, 1\} = 1$
$\uparrow$\{Martin, Ľuboš\}(SD) $=$ inf$\{1, 0.75\} = 0.75$ atď.

Teda $\uparrow$\{Martin, Ľuboš\} je nejaká funkcia f (fuzzy podmnožina A) s hodnotami:

a	CD	SD	DM	SM	CM	FW
$f(a)$	1	0.75	0.75	0.5	0.25	0.25

Naopak $\downarrow(f)$ je množina všetkých objektov majúcich atribúty v hodnotách minimálne takých ako nám predpisuje funkcia f. Pre našu funkciu f teda dostávame, že Pavol $\in\downarrow(f)$, lebo:
R(CD, Pavol) $= 1 \geq 1 = f$(CD)
R(SD, Pavol) $= 1 \geq 0.75 = f$(SD)
R(DM, Pavol) $= 0.75 \geq 0.75 = f$(DM)
R(SM, Pavol) $= 0.5 \geq 0.5 = f$(SM)
R(CM, Pavol) $= 0.75 \geq 0.25 = f$(CM)
R(FW, Pavol) $= 0.25 \geq 0.25 = f$(FW)

Analogicky Martin $\in\downarrow(f)$ a Ľuboš $\in\downarrow(f)$.
Avšak Jozef $\notin\downarrow(f)$, pretože R(CD, Jozef) $= 0.75 < 1 = f$(CD), takisto platí, že R(SD, Jozef) $= 0.5 < 0.75 = f$(SD) a R(DM, Jozef) $= 0.5 < 0.75 = f$(DM).
A takisto ani Tibor $\notin\downarrow(f)$, pretože R(CD, Tibor) $= 0.5 < 1 = f$(CD), taktiež platí R(SD, Tibor) $= 0.5 < 0.75 = f$(SD) a R(DM, Tibor) $= 0.5 < 0.75 = f$(DM).
Celkovo teda $\downarrow(f) =$ \{Martin, Jozef, Ľuboš\}.

Z takýchto konceptov by sme sa už mohli dozvedieť pri danom kontexte aj to, či daní chlapci majú predpoklady a talent hrať na nejakom poste. Pri koncepte \{Martin, Ľuboš, Pavol\} môžeme zistiť nielen to, že chlapci radi vykonávajú niektoré činnosti futbalistu, ako tomu bolo v predchádzajúcej podkapitole, ale aj to, či majú daní chlapci predpoklady úspešne hrať na týchto pozíciách na ihrisku. Znovu ak chceme nájsť všetky koncepty, tak takýto postup musíme opakovať pre všetky podmnožiny objektov, to znamená pre n objektov je to 2^n podmnožín.

Pozrime sa na koncepty, ktoré sme po aplikovaní tohto prístupu dostali:

{ Jozef, Tibor} {CD/0.5, SD/0.5, DM/0.5, SM/0.5, CM/0.75, FW/1.0}

{ Martin, Ľuboš, Pavol} {CD/1.0, SD/0.75, DM/0.75, SM/0.5, CM/0.25, FW/0.25}

{ Martin, Jozef, Ľuboš, Pavol} {CD/0.75, SD/0.5, DM/0.5, SM/0.5, CM/0.25, FW/0.25}

{ Martin, Jozef, Ľuboš, Pavol, Tibor} {CD/0.5, SD/0.5, DM/0.5, SM/0.5, CM/0.25, FW/0.25}

{Martin, Jozef, Pavol, Tibor} {CD/0.5, SD/0.5, DM/0.5, SM/0.5, CM/0.75, FW/0.75}

{ } {CD/1.0, SD/1.0, DM/1.0, SM/1.0, CM/1.0, FW/1.0}

{Martin, Pavol} {CD/1.0, SD/1.0, DM/0.75, SM/0.5, CM/0.75, FW/0.75}

{Martin, Jozef, Pavol} {CD/0.75, SD/0.5, DM/0.5, SM/0.5, CM/0.75, FW/0.75}

{Jozef} {CD/0.75, SD/0.5, DM/0.5, SM/0.5, CM/0.75, FW/1.0}

{Martin} {CD/1.0, SD/1.0, DM/1.0, SM/0.5, CM/0.75, FW/0.75}

{ Ľuboš} {CD/1.0, SD/0.75, DM/0.75, SM/0.75, CM/0.25, FW/0.25}

Prvý koncept, v ktorom máme hráčov Jozefa a Tibora, nám vytvára akési zoskupenie hráčov s výbornými ofenzívnymi schopnosťami záložníka a excelentnými schopnosťami útočníka, pričom v ostatných činnostiach sú títo hráči priemerní. Tento koncept by sme mohli pokojne nazvať ako koncept útočníkov. Naopak druhý koncept, ktorý je tvorený hráčmi Martinom, Ľubošom a Pavlom, by sme mohli nazývať ako koncept obrancov, čomu zodpovedajú hodnoty v intente tohto konceptu. Tretí koncept, do ktorého patria všetci okrem Tibora, nám dokonca konkretizuje obrannú činnosť stopéra a pokojne by sme ho mohli označiť za koncept výborných stredných obrancov, keďže v intente tohto konceptu dominuje výborná obranná hra v strede obrany. Je predpoklad, že na základe týchto výsledkov by tréner nejakého mužstva vedel, na ktorom poste a aký hráč môže hrávať a ktorí hráči sú si blízki svojimi schopnosťami a teda ich spoločná súhra by mohla priniesť ovocie. Je ale prirodzené, že niektoré koncepty nedokážeme pomenovať, ako sme už spomenuli v predošlých kapitolách, čo je vidieť aj na niektorých týchto konceptoch. Takisto je zjavné, že ak položíme vysoké požiadavky na hráčov a budeme chcieť, aby každý z nich exceloval na každom poste, tak nikto z týchto našich futbalistov do takéhoto konceptu nebude patriť. Demonštráciou tohto prípadu je šiesty koncept.

Tento jednostranný prístup doc. Krajčiho je aplikovateľný takisto na klasický kontext, ktorý obsahuje len dve hodnoty (0 a 1 v zmysle pravda a nepravda), keďže takýto kontext nie je nič iné ako špeciálny prípad fuzzy kontextu (jeho hodnoty sú takisto z intervalu [0,1]).

Nech $X \subseteq B$ je ľubovoľná klasická podmnožina množiny objektov a a je ľubovoľný atribút z množiny A, potom $\uparrow(X)(a) = \inf\{r(b,a) \mid b \in X\}$ je hodnota z množiny $\{0,1\}$. Navyše $\uparrow(X)$ je klasická podmnožina množiny atribútov, ktorá obsahuje iba tie atribúty, ktoré sú zdieľané všetkými objektami zo vstupnej množiny X. Teda možno tento prístup považovať za zovšeobecnenie klasického prístupu.

1.4 Zovšeobecnená formálna konceptová analýza

V podkapitole 1.2 sme hovorili o tom, že fuzzy prístup podľa prof. Bělohlávka je zovšeobecnením klasického prístupu a takisto v podkapitole 1.3, že Krajčiho prístup jednostrannej fuzzifikácie je takisto zovšeobecnením klasického prístupu. Z dôvodu nekompatibility spomínaných prístupov vznikla potreba nájdenia teórie pokrývajúcej oba spomínané prístupy (jednostranné a obojstranné fuzzy). Práve tomu sa venuje Krajči vo svojej práci [8] a v tejto podkapitole si predkladáme jeho zovšeobecnenie konceptových zväzov.

Máme teda 3 prístupy, ktoré budú doplnené o zovšeobecnený prístup. Krajči v práci [8] zhrnul prístupy do tabuľky, ktorú môžeme zjednodušene ilustrovať tabuľkou 1.3.

typ	$Dom(\uparrow)$	$Dom(\downarrow)$
crisp	$\{0,1\}^B$	$\{0,1\}^A$
jednostranne fuzzy	$\{0,1\}^B$	$[0,1]^A$
obojstranne fuzzy	L^B	L^A
zovšeobecnený	D^B	C^A

Tabuľka 1.3: Prístupy doplnené o zovšeobecnený prístup

Myšlienkou zovšeobecneného prístupu je teda akési rozlíšenie typov „fuzzy-ovosti“ objektov a atribútov. Pozrime sa na definíciu zobrazení $\uparrow, \downarrow$ pre zovšeobecnený prístup, ktoré definoval v práci [8] Krajči.

Definícia 1.4.1 ($\uparrow, \downarrow$ pre zovšeobecnený prístup) Nech $\langle P, \leq \rangle$ je nosič usporiadaná množina a C a D nosiče úplných zväzov. Nech $\bullet : C \times D \to P$ je izotónna a zľava spojitá v oboch argumentoch, t. j. platí:

1a Z $c_1 \leq c_2$ vyplýva $c_1 \bullet d \leq c_2 \bullet d$ pre všetky $c_1, c_2 \in C$ a $d \in D$.

1b Z $d_1 \leq d_2$ vyplýva $c \bullet d_1 \leq c \bullet d_2$ pre všetky $c \in C$ a $d_1, d_2 \in D$.

2a Ak $d \in D, p \in P$ a pre všetky $c \in X \subseteq C$ platí $c \bullet d \leq p$, tak $\sup X \bullet d \leq p$.

2a Ak $c \in C, p \in P$ a pre všetky $d \in Y \subseteq D$ platí $c \bullet d \leq p$, tak $c \bullet \sup Y \leq p$.

Nech A a B sú neprázdne množiny a $R : A \times B \to P$. Definujme tentokrát zobrazenia $\uparrow : D^B \to C^A$ a $\downarrow : C^A \to D^B$ takto:

- Ak $g : B \to D$, tak $\uparrow (g) : A \to C$ je definovaná vzťahom:

$$\uparrow (g)(a) = \sup\{c \in C : (\forall b \in B) c \bullet g(b) \leq R(b,a)\}.$$

- Ak $f : A \to C$, tak $\downarrow (f) : B \to D$ je definovaná vzťahom:

$$\downarrow (f)(b) = \sup\{d \in D : (\forall a \in A) f(a) \bullet d \leq R(b,a)\}.$$

Tieto zobrazenia spĺňajú podmienky Galoisovej konexie, čo je ukázané v práci [8]. Môžeme teda definovať konceptový zväz štandardným spôsobom.

Definícia 1.4.2 (Zovšeobecnený koncept a konceptový zväz) *Zovšeobecneným konceptom* nazývame dvojicu $\langle g, f\rangle$ z $D^B \times C^A$ takú, že $\uparrow (g) = f$ a $\downarrow (f) = g$.
Ak sú $\langle g_1, f_1\rangle$ a $\langle g_2, f_2\rangle$ zovšeobecnené koncepty, definujeme ich usporiadanie $\langle g_1, f_1\rangle \leq \langle g_2, f_2\rangle$, práve vtedy keď $g_1 \leq g_2$ (alebo ekvivalentne $f_1 \leq f_2$).
Množinu všetkých zovšeobecnených konceptov s usporiadaním $\leq$ nazveme *zovšeobecnený konceptový zväz* a označíme ho $\mathrm{GCL}(B, A, R, C, D, P, \bullet)$.

Následne, po definícii zovšeobecneného konceptového zväzu, môžeme uvádzať analógiu základnej vety o konceptových zväzoch pre zovšeobecnený prístup.

Veta 1.4.1 (Základná veta o zovšeobecnených konceptových zväzoch) Vetu o zovšeobecnených konceptových zväzoch tvoria 2 vlastnosti:

1. Zovšoebecnený konceptový zväz $\mathrm{GCL}(B, A, R, C, D, P, \bullet)$ je úplný zväz, v ktorom platí:
$$\bigwedge_{i\in I} \langle g_i, f_i\rangle = \left\langle \bigwedge_{i\in I} g_i, \uparrow \left(\downarrow \left(\bigvee_{i\in I} f_i \right)\right)\right\rangle$$
a
$$\bigvee_{i\in I} \langle g_i, f_i\rangle = \left\langle \downarrow \left(\uparrow \left(\bigvee_{i\in I} g_i \right)\right), \bigwedge_{i\in I} f_i \right\rangle.$$

2. Nech navyše P má najmenší prvok 0_P a nech $0_C \bullet d = 0_P$ a $c \bullet 0_D = 0_P$ pre všetky $c \in C$ a $d \in D$. Potom úplný zväz $\langle V, \preceq\rangle$ je izomorfný so zväzom $GCL(A, B, R, C, D, P, \bullet)$ práve vtedy, keď existujú zobrazenia $\alpha : A \times C \to V$ a $\beta : B \times D \to V$ také, že platí:

   1a $\alpha[A]$ je nerastúca v druhom argumente.

   1b $\beta[B]$ je neklesajúca v druhom argumente.

2a $\alpha[A \times C]$ je infimovo hustá

2b $\beta[B \times D]$ je suprémovo hustá

3 Pre každé $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ platí

$$\alpha(a, c) \succeq \beta(b, d) \text{ práve vtedy, keď } c \bullet d \leq R(b, a).$$

Kapitola 2

Efektívny algoritmus pre vyhľadávanie fuzzy formálnych konceptov

V tejto kapitole si priblížime prístup prof. Bělohlávka k vyhľadávaniu konceptov a jeho práci [3]. Ide o vyhľadávanie konceptov v homogénnych fuzzy kontextoch, kde však nie je fuzzifikovaná len atribútova časť (tak ako tomu bolo v prístupe Krajčiho v podkapitole 1.3), ale takisto je fuzzifikovaná aj objektová časť. To znamená, že obidve zložky konceptu, to znamená intenzionálna zložka konceptu a takisto extenzionálna zložka konceptu, budú môcť nadobúdať hodnoty z intervalu [0,1]. Takémuto kontextu budeme hovoriť obojstranne fuzzy homogénny kontext.

Pre lepšie chápanie si opäť vezmime tabuľku 1.2, kde objektmi budú chlapci, z ktorých by mohli byť futbalisti a atribútmi činnosti futbalistu, ktoré každý hráč môže zastávať v mužstve. Tentoraz sa pri vyhľadávaní konceptov nebudeme zaoberať len tým, či daný hráč patrí nášmu nájdenému konceptu alebo nebude, ale takisto nás bude zaujímať hodnota, ktorú v danom koncepte objekt nadobúda. Pre jednoduchosť to môžme v našom príklade chápať tak, že hodnota, ktorú bude objekt v extente nadobúdať, bude predstavovať to, na koľko percent je daný hráč stotožnený s daným konceptom.

Je prirodzené, že obojstranná fuzzifikácia prinesie zmenu v spôsobe vyhľadávania konceptov oproti doteraz ukázanému Krajčiho prístupu a vrátime sa späť k definovaniu zobrazení $\uparrow$ a $\downarrow$ z podkapitoly 1.2, ktoré uviedol práve Bělohlávek. Zobrazenia $\uparrow$ a $\downarrow$ teda vyzerajú nasledovne:

$$\uparrow(X)(a) = \bigwedge_{b \in B} (X(b) \to r(b,a))$$

$$\downarrow(Y)(b) = \bigvee_{a \in A} (Y(a) \to r(b,a)).$$

Opiera sa pritom o Lukasiewiczovu logiku, ktorú sme uviedli v podkapitole 1.2 a jej fuzzy konjunkcia a fuzzy implikácia majú tvar:

$$\text{fuzzy konjunkcia: } x \otimes y = \max\{0, x + y - 1\}$$
$$\text{fuzzy implikácia: } x \to y = \min\{1 - a + b, 1\}.$$

Zásadnou zmenou a zlepšením oproti predošlému Krajčiho prístupu [1] pri jednostrannej fuzzifikácii je, ako sme už naznačili, lepšia efektivita a podstatne menší počet operácií, ktoré je potrebné vynaložiť na nájdenie všetkých konceptov v nejakom kontexte. Zatiaľ čo v tzv. brute-force prístupe prehľadávame každú podmnožinu objektov a uzatvárame ich dvojicou zobrazení $\uparrow$ a $\downarrow$ (to znamená prehľadávame všetky možnosti), tak v Bělohlávek prišiel v práci [3] s prístupom, v ktorom sa podmnožiny vyberajú systematicky a rekurzívne podľa istých pravidiel a koncepty sú vyhľadávané, čo sa týka usporiadania v Hasseho diagrame, od najmenších (vo väčšine prípadov $\emptyset$) až po koncept, ktorý je tvorený všetkými objektmi kontextu. V práci [3] takisto demonštroval zlepšenie efektivity vo vyhľadávaní konceptov na základe viacerých experimentálnych testovaní a porovnaní výstupov.

V tejto tejto časti práce je našou snahou tento prístup priblížiť, preto si popíšme algoritmus, ktorý Bělohlávek vo svojej práci prezentoval. Myšlienkou algoritmu je v prvom kroku uzavrieť najmenšiu možnú podmnožinu objektov (čo znamená prázdnu množinu) pomocou daných zobrazení $\uparrow$ a $\downarrow$ a po nájdení konceptu, koncept pridáme do výslednej množiny konceptov. Ďalej najprv použijeme metódu *SUSEDIA* na nájdenie jeho priamych horných susedov a pre každého novonájdeného horného suseda potom modifikujeme informáciu o jeho dolnom susedovi (D je horný sused B, ak B je dolný sused D). Každý novonájdený koncept, ktorý je horným susedom nášho pôvodného konceptu a doteraz nebol nájdený v predošlých vyhľadávaniach, je pridaný do výslednej množiny konceptov a rekurzívne opakujeme tento postup pre každého takéhoto horného suseda. Opakovanie trvá až pokiaľ nenájdeme koncept, ktorý bude pozostávať zo všetkých objektov kontextu.

Algoritmus pozostáva z 3 metód: *KONCEPTY*, *GENERUJZ* a *SUSEDIA*.

KONCEPTY

$F = \emptyset$

$X = \downarrow(\uparrow(\emptyset))$ // uzáver prázdnej množiny

$F = F \cup \{X\}$ // nájdený koncept je pridaný do výstupnej množiny konceptov

GENERUJZ(X) // volanie metódy GenerujZ

return F // výstup

V metóde *KONCEPTY* si deklarujeme množinu konceptov F, ktorá bude výstupom algoritmu. Prirodzene na začiatku algoritmu je prázdna. Následne vytvárame prvý krok, v ktorom uzavrieme prázdnu množinu. Nájdený koncept (X) pridáme do množiny F a zavoláme metódu GenerujZ pre tento koncept. Po skončení vrátime na výstup množinu konceptov F.

GENERUJZ (X)

```
while (X ≠ B) do // opakujem pokiaľ som nenašiel najväčší koncept
begin
    X* = SUSEDIA(X) // do X* priradím všetkých najbližších horných susedov
    N = X* \ F // do N priradím horných susedov, ktorých som ešte nenašiel
    For each D ∈ X* do
    begin
        Add X to D_x // X prehlásime ako dolného suseda všetkých horných z X*
        If D ∈ N
            F = F ∪ D //pre každého suseda overím, či som ho predtým nenašiel,
                                  ak nie tak ho pridám do výstupu F.
    end
    For each D ∈ N do //rekurzívne volám metódu pre všetkých nových priamych
        GenerujZ(D)            horných susedov
end
```

V metóde *GENERUJZ* sa pýtame, či náhodou náš koncept X nie je konečný (v tom zmysle, že pozostáva zo všetkých objektov v B). Ak nie, tak hľadáme jeho priamych horných susedov (voláme metódu *SUSEDIA*), ktorých sme ešte nenašli a priradíme do N. Pre každého suseda overujeme, či je priamym horným susedom, ktorého sme ešte nenašli a ak áno, tak ho pridáme do F. Pre každého horného suseda, ktorého sme pridali do F potom rekurzívne voláme opäť metódu $GENERUJZ$ až pokiaľ koncept, pre ktorý voláme túto metódu nie je rovný množine objektov B.

SUSEDIA(X)

$U = \emptyset$

$min = \{y \in B \mid X(y) < 1\}$ // do premennej min priradíme všetky objekty, ktoré v koncepte X majú hodnotu menšiu ako 1.

For each $y \in min$ do // pre každý objekt z min

begin

$Y = \downarrow(\uparrow([y]_x))$ // uzatvárame pre priameho horného suseda X (objekt y je v X navýšený na najbližšiu hornú fuzzy hodnotu)

$narast = \{b \in B \mid b \neq y \ \& \ B(b) < D(b)\}$ // zistím, či aj nejaký iný objekt okrem y zvýšil svoju hodnotu

If ($min \cap narast$) = $\emptyset$

$U = U \cap \{Y\}$ // ak nemám nárast, koncept Y prehlásim za horného suseda X.

Else

$min = min \setminus y$ // ak nemám nárast, odstránim y z Min

end

Return U; // vrátim množinu horných susedov

Vezmime našu tabuľku 1.2 a ilustrujme Bělohlávkov algortimus na nej.

	CD	SD	DM	SM	CM	FW
Martin	1	1	1	0.5	0.75	0.75
Jozef	0.75	0.5	0.5	0.5	0.75	1
Ľuboš	1	0.75	0.75	0.75	0.25	0.25
Pavol	1	1	0.75	0.5	0.75	0.25
Tibor	0.5	0.5	0.5	0.5	0.75	1

Tabuľka 1.2: Formálny fuzzy kontext

Nech všetky objekty nadobúdajú hodnoty z logiky $L^B = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ podobne ako všetky atribúty. Po aplikácii predstaveného Bělohlávkovho algoritmu na našu tabuľku 1.2 sme vyhľadali všetky koncepty. Pozrime sa na niektoré z nich a skúsme ich popísať v ľudskej reči.

{Martin/0.5, Jozef/0.5, Ľuboš/0.25, Pavol/0.25, Tibor/0.5}

{ CD/1.0, SD/1.0, DM/1.0, SM/1.0, CM/1.0, FW/1.0}

Tento koncept nám vraví, že ak budeme požadovať od hráčov, aby na všetkých postoch vedeli hrať excelentne, tak nenájdeme ani jedného, ktorý by takejto podmienke vyhovoval na 100%. Martin, Jozef a Tibor spĺňajú túto podmienku len z polovice, Ľuboš a Pavol dokonca len na 25%.

Ak však upustíme z takýchto náročných požiadaviek a postačia nám hráči, ktorí sú iba priemerní v defenzívnych činnostiach, ale zasa majú výborné schopnosti útočníkov a výborné ofenzívne schopnosti, dostaneme koncept:

{Martin/0.75, Jozef/1.0, Ľuboš/0.25, Pavol/0.25, Tibor/1.0}

{ CD/0.5, SD/0.5, DM/0.5, SM/0.5, CM/0.75, FW/1.0}

Ľahko vidieť, že pri znížení nárokov dostávame aj hráčov, ktorí vyhovujú našim požiadavkám na 100%. Sú nimi Jozef a Tibor. Takisto aj o Martinovi sa dá povedať, že z istého uhla pohľadu vyhovuje naším požiadavkam, keďže vyhovuje na 75%. Ľuboš a Pavol sa do takejto koncepcie hráčov nehodia. Patria tam len na 25%.

Kapitola 3

Heterogénna formálna konceptová analýza

Doteraz sme sa zaoberali kontextami, kde všetky atribúty a všetky objekty nadobúdali hodnoty z rovnakej množiny $\{0,1\}$ alebo boli fuzzifikované rovnako. Hovoríme im, že sú to homogénne kontexty, respektíve homogénne fuzzy kontexty. V práci [5] sme sa však zaoberali možnosťou vyhľadávať koncepty v kontextoch, kde každý atribút mohol byť fuzzifikovaný inak, nezávisle od ostatných. Teda vyhľadávali sme koncepty v atribútovo-heterogénnych fuzzy kontextoch. Vynára sa teda prirodzene otázka, ako vyhľadávať koncepty v heterogénnych fuzzy kontextoch, kde nie len každý atribút je fuzzifikovaný inak, ale aj každý objekt bude pripúšťať svoje vlastné hodnoty a bude fuzzifikovaný inak, nezávisle od ostatných objektov.

Heterogénnym kontextom a ich definícii sa vo svojej práci [4] venoval Macek a takisto Antoni v práci [6]. V tejto kapitole predvádzame príklad, ktorý motivuje k zaoberaniu sa takýmito heterogénnymi kontextami.

3.1 Motivačný príklad

Tentokrát uvažujme situáciu, že máme niekoľko futbalových klubov. Tak ako je zvykom, každý futbalový klub sa snaží prosperovať a tak obchoduje počas alebo mimo sezóny s hráčmi s cieľom zvýšiť silu a kredit svojho mužstva. Každý klub má isté slabiny v kádri, ktoré sa snaží odstrániť získaním kvalitného hráča, ktorý disponuje vlastnosťami, aké klub požaduje. Naopak ak sa na to pozrieme z druhej strany, teda nie zo strany klubov, ale zo strany hráčov, tak je častá situácia, že hráčovi vyprší zmluva s nejakým futbalovým klubom a začne si hľadať nového zamestnávateľa. Presnejšie

to robí hráčov agent. Ten pozná kvality a schopnosti svojho hráča a snaží sa nájsť taký klub hráčovi, aby boli obe strany (klub aj hráč) spokojné.
Ilustrujme túto situáciu príkladom s tabuľkou 3.1. Objektmi sú futbalové kluby. Atribútmi zasa schopnosti hráčov, tak ako doteraz. Predstavme si, že klub hľadá hráča, ktorý splní požiadavky klubu svojimi schopnosťami. Teda každý klub má isté predstavy, aké vlastnosti daný hráč má mať a naopak, ktoré vlastnosti hráča sú klubu ľahostajné. Teda hodnoty v tabuľke budú vyjadrovať to, ako veľmi je daný atribút (schopnosť hráča) ľahostajný klubu pri jeho požiadavkach. Uvažujeme tri typy hodnôt. Či sú dané schopnosti hráča klubu ľahostajné (hodnota 1), trochu ľahostajné (0.5) a vôbec ľahostajné (0).

	CD	SD	DM	SM	CM	FW
Barcelona	0	0.5	0	1	1	1
Chelsea	0	0	0.5	1	1	1
Arsenal	1	1	0	0	0	0.5
AC Miláno	1	1	0	0	0.5	1
Bayern	1	1	1	0.5	0	0

Tabuľka 3.1: Futbalové kluby a ich nároky

Objektmi sú teda kluby FC Barcelona, FC Chelsea Londýn, Arsenal Londýn, AC Miláno a Bayern Mníchov. Atribútmi budú činnosti stredného obrancu (CD - center defenseman), krajného obrancu (SD), stredného defenzívneho záložníka (DM), krajného záložníka (SM), stredného ofenzívneho záložníka (CM) a činnosti útočníka (FW).

Ak sa pozrieme napríklad na Barcelonu, tak tabuľka vyjadruje, že tomuto klubu nie sú ľahostajné činnosti stredného obrancu (CD) a stredného defenzívneho záložníka (DM). Takisto klubu trochu záleží na činnostiach krajného obrancu. Nezaujímajú ho však činnosti útočníka, ofenzívneho záložníka ani krajného záložníka. Teda vo futbalovej reči to znamená, že Barcelona by potrebovala defenzívneho hráča, najlepšie stopéra alebo defenzívneho záložníka, ktorý však dokáže hrať aj na kraji obrany. Naopak taký Bayern Mníchov sa nezaujíma o obranné schopnosti hráča, ale zameriava sa práve na útočné typy hráčov. Vidíme, že mu nie sú ľahostajné činnosti útočníka (FW) a stredného ofenzívneho záložníka. Takže skôr potrebuje a hľadá útočiaceho hráča.

Čo je však dôležité, nie každý atribút môže nadobúdať rovnaké hodnoty. Prirodzene je rodziel napríklad v činnostiach stredného obrancu a činnostiach stredného ofenzívneho záložníka. Preto môže každý atribút nadobúdať hodnoty zo svojho vlastného kompletného zväzu.

Pre atribút CD a DM uvažujme 4 hodnoty: exc, boj, poz, sla .

- exc - vyjadruje, že hráč je excelentný na tomto poste
- boj - vyjadruje, že hráč je skôr bojovný, dobrý v osobných súbojoch
- poz - vyjadruje, že hráč hrá dobre pozične
- sla - vyjadruje, že hráč je na tomto poste slabý

Pre atribút SD a SM uvažujme 4 hodnoty: exc, def, ofe, sla .

- exc - vyjadruje, že hráč je excelentný na tomto poste
- def - vyjadruje, že hráč lepšie zvláda ofenzívne činnosti na tomto poste ako defenzívne
- ofe - vyjadruje, že hráč lepšie zvláda defenzívne činnosti na tomto poste ako ofenzívne
- sla - vyjadruje, že hráč je na tomto poste slabý

Pre atribút CM uvažujme 4 hodnoty: exc, beh, tech, sla .

- exc - vyjadruje, že hráč je excelentný na tomto poste
- beh - vyjadruje, že hráč je behavý a aktívny
- tech - vyjadruje, že hráč je tvorivý a technicky zdatný
- sla - vyjadruje, že hráč je na tomto poste slabý

Pre atribút FW uvažujme 3 hodnoty: exc, pri, sla .

- exc - vyjadruje, že hráč je excelentný na tomto poste
- pri - vyjadruje, že hráč je priemerný na tomto poste
- sla - vyjadruje, že hráč je na tomto poste slabý

To isté platí aj pre objektovú časť, kde môžme uvažovať vlastné hodnoty pre každý objekt. Mohli by sme uvažovať dvojhodnotovú logiku pre kluby, ktorá by vyjadrovala či sú dané schopnosti hráča vhodné pre klub alebo nevhodné. Pre niektoré kluby by sme ale uvažovali trojhodnotovú logiku s hodnotami vhodný, menej vhodný alebo nevhodný pre klub. Boli by to kluby, ktoré pripúšťajú možnosť experimentovať a sú ochotné vyskúšať aj hráčov, ktorí svojimi schopnosťami zapadajú do plánov klubu len čiastočne. Pre zjednodušenie príkladu uvažujme pre všetky kluby rovnaký kompletný zväz s hodnotami:

- vhodný
- menej vhodný
- nevhodný.

Tabuľku 3.1 teda môžeme ilustrovať podrobnejšie tabuľkou 3.2, v ktorej sú zobrazené aj príslušné kompletné zväzy. Každý objekt a každý atribút môže nadobúdať hodnoty zo svojho kompletného zväzu.

		sla, boj, poz, exc	sla, def, ofe, exc	sla, boj, poz, exc	sla, def, ofe, exc	sla, beh, tec, exc	sla, pri, exc
		CD	SD	DM	SM	CM	FW
V, M, N	Barcelona	0	0.5	0	1	1	1
V, M, N	Chelsea	0	0	0.5	1	1	1
V, M, N	Arsenal	1	1	0	0	0	0.5
V, M, N	AC Miláno	1	1	0	0	0.5	1
V, M, N	Bayern	1	1	1	0.5	0	0

Tabuľka 3.2: Futbalové kluby a ich nároky aj so zväzmi

Ďalšia vec, ktorú musíme v našom príklade zohľadniť je aj to, že máme rôzne kluby z rôznych krajín. V každej krajine sa hrá iná liga. Anglická liga sa napríklad vyznačuje fyzickým futbalom s vysokým tempom. V Španielsku sa hrá viac technicky, v Taliansku sa zase kladie dôraz na taktiku. Nemecko sa vyznačuje dynamickým futbalom. Preto ak napríklad v našom prípade Barcelona spolu s Chelsea hľadajú kvalitného stredného obrancu, nemusí to znamenať to isté. Samozrejme, že oba kluby by chceli excelentného hráča, ktorý ovláda všetky činnosti dokonale. Ale samozrejme na trhu je takýchto hráčov minimum. Preto sa nájdu rozdiely v ich požiadavkách. Je predpoklad, že Barcelona bude skôr hľadať hráča, ktorý hrá dobre pozične a má dobrú rozohrávku ako hráča s dobrou fyzickou hrou. Naopak Chelsea vzhľadom na anglickú ligu sa bude skôr zameriavať na fyzické predpoklady hráča. Aj tu možno hovoriť o akejsi heterogenite na strane objektov. Tieto odlišnosti budú určené systémom konjunkcií, ktorý pre každý objekt a atribút definuje vzťah medzi hodnotami kompletného zväzu daného objektu a hodnotami kompletného zväzu daného atribútu. Teda pre každé políčko tabuľky 3.1 budeme mať tabuľku, ktorá tento vzťah bude vyjadrovať. Hodnoty tabuľky budú z kompletného zväzu, ktorý je definovaný pre každé políčko tabuľky. V našom prípade teda množina $\{1, 0.5, 0\}$.

Vezmime si napríklad klub Barcelonu a činnost stredného obrancu (atribút CD). Vzťah konjunkcie medzi hodnotami objektovej a atribútovej časti bude vyjadrený tabuľkou 3.3. Objektami budú hodnoty zo zväzu pre objekt Barcelona, teda hodnoty V - vhodný, M - menej vhodný a N - nevhodný. Atribútmi budú hodnoty zo zväzu pre atribút CD, teda hodnoty sla - slabý, boj - bojovný, poz - pozičný, exc - excelentný.

$\bullet_{\text{Barc., CD}}$	sla	boj	poz	exc
V	1	1	0	0
M	0.5	0.5	0	0
N	0	0	0	0

Tabuľka 3.3: Konjunkcia medzi hodnotami pre objekt Barcelona a atribút CD

Pre Chelsea Londýn a ten istý atribút (CD) bude konjunkcia vyzerať nasledovne:

$\bullet_{\text{Chel., CD}}$	sla	boj	poz	exc
V	1	0	1	0
M	0.5	0	0.5	0
N	0	0	0	0

Tabuľka 3.4: Konjunkcia medzi hodnotami pre objekt Chelsea a atribút CD

Môžeme si všimnúť, že tabuľky 3.3 a 3.4 sa od seba líšia v atribútoch "boj" a "poz". Je to dané práve heterogenitou vzhľadom na objekty Barcelonu a Chelsea Londýn. Zatiaľ čo Barcelona si zakladá na pozičnom a technicky vyspelejšom obrancovi, tak

Chelsea Londýn viac zaujíma fyzická hra stredného obrancu, čo odzrkadľuju hodnoty v tabuľkách. Ak si vezmeme činnosť útočníka, objekty v konjunkcii budú rovnaké ako v predošlých konjunkciách, ale atribútmi budú hodnoty zo zväzu pre FW atribút. Nimi sú hodnoty sla - slabý, pri - priemerný, exc - excelentný. V tomto prípade majú oba kluby rovnaké konjunkcie vyjadrené v tabuľke 3.5.

$\bullet_{\text{Barc./Chel., FW}}$	sla	pri	exc
V	1	0.5	0
M	0.5	0	0
N	0	0	0

Tabuľka 3.5: Konjunkcia medzi hodnotami pre objekt Barcelonu/Chelsea a atribút FW

Takýchto konjunkcií budeme mať dokopy 30. Každému objektu vo vzťahu ku každému atribútu bude priradená jedna. Skúmať, ktorý hráč s akými vlastnoťami spĺňa podmienky ktorého klubu, či ktorá liga v ktorej krajine je pre hráča vhodná, je namáhavé a doterajšie prístupy,ktoré sme uviedli k tomu nevedú. Preto vznikla potreba definovať potrebné pojmy, ktoré predkladáme v nasledujúcej podkapitole.

3.2 Základy heterogénnej FCA

Definícia 3.2.1 (Heterogénny kontext) *Heterogénnym kontextom* sa nazýva usporiadaná sedmica $\langle B, A, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \odot \rangle$, kde

- B je neprázdna množina objektov.
- A je neprázdna množina atribútov.
- $\mathcal{P} = \{\langle P_{b,a}, \leq_{b,a} \rangle : a \in A, b \in B\}$ je systém usporiadaných množín.
- $R : B \times A$ taká, že $R(b, a) \in P_{b,a}$, pre všetky $a \in A$ a $b \in B$.
- $\mathcal{U} = \{\langle U_b, \leq_{U_b} \rangle : b \in B\}$ je systém kompletných zväzov.
- $\mathcal{V} = \{\langle V_a, \leq_{V_a} \rangle : a \in A\}$ je systém kompletných zväzov.
- $\odot = \{\bullet_{b,a} : b \in B, a \in A\}$ je systém operácií, takých, že $\bullet_{b,a}$ je operácia z $U_b \times V_a$ do $P_{b,a}$ a je izotónna a zľava spojitá v oboch argumentoch.

Tak ako pri každom prístupe, aj tu potrebujeme k aplikácii formálnej konceptovej analýzy zobrazenia $\uparrow, \downarrow$. Pri heterogénnom kontexte sú definované nasledovne:

Definícia 3.2.2 ($\uparrow, \downarrow$ pre heterogénny prístup) Nech F je množina všetkých funkcií f s doménou A takých, že $f(a) \in V_a$, pre všetky $a \in A$ (formálne $F = \prod_{a \in A} V_a$) a G je množina všetkých funkcií g s doménou B takých, že $g(b) \in U_b$, pre všetky $b \in B$ ($G = \prod_{b \in B} U_b$).
Definujme zobrazenia $\uparrow: G \to F$ a $\downarrow: F \to G$ nasledovne:

- Ak $g \in G$, tak $\uparrow(g) \in F$ je definovaná ako:

$$\uparrow(g)(a) = \sup\{v \in V_a : (\forall b \in B) v \bullet_{b,a} g(b) \leq r(b,a)\}.$$

- Ak $f \in F$, tak $\downarrow(f) \in G$ je definovaná ako:

$$\downarrow(f)(b) = \sup\{u \in U_b : (\forall a \in A) f(a) \bullet_{b,a} u \leq r(b,a)\}.$$

To, že zobrazenia $\uparrow, \downarrow$ tvoria Galoisovu konexiu, je ukázané v práci [6]. Keďže poznáme definíciu zobrazení $\uparrow, \downarrow$, ktoré tvoria Galoisovu konexiu, môžme definovať aj heterogénny koncept.

Definícia 3.2.3 (Heterogénny koncept a heterogénny konceptový zväz) *Heterogénnym konceptom* nazývame dvojicu $\langle g, f \rangle$ z $\prod_{b \in B} U_b \times \prod_{a \in A} V_a$ takú, že platí $\uparrow(g) = f$ a $\downarrow(f) = g$.
Množinu všetkých heterogénnych konceptov s usporiadaním $\leq$ nazveme *heterogénny konceptový zväz* a označíme ho $\mathrm{HCL}(B, A, \mathcal{P}, R, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \odot, \uparrow, \downarrow, \leq)$.

To, že pojem zväz korešponduje s realitou, nám hovorí aj nasledujúca základná veta o heterogénnych konceptových zväzoch.

Veta 3.2.1 (Základná veta o heterogénnych konceptových zväzoch) Základnú vetu o heterogénnych konceptových zväzoch tvoria 2 vlastnosti:

1. Heterogénny konceptový zväz $\mathrm{HCL}(B, A, \mathcal{P}, R, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \odot, \downarrow, \uparrow, \leq)$ je úplný zväz, v ktorom platí:

$$\bigwedge_{i \in I} \langle g_i, f_i \rangle = \left\langle \bigwedge_{i \in I} g_i, \uparrow \left(\downarrow \left(\bigvee_{i \in I} f_i \right) \right) \right\rangle$$

a

$$\bigvee_{i \in I} \langle g_i, f_i \rangle = \left\langle \downarrow \left(\uparrow \left(\bigvee_{i \in I} g_i \right) \right), \bigwedge_{i \in I} f_i \right\rangle.$$

2. Nech navyše $P_{b,a}$ má najmenší prvok $0_{P_{b,a}}$ a nech $0_{V_a} \bullet_{b,a} u = v \bullet_{b,a} 0_{U_b} = 0_{P_{b,a}}$ pre všetky $v \in V_a$ a $u \in U_b$. Potom úplný zväz L je izomorfný so zväzom $\mathrm{HCL}(B, A, \mathcal{P}, R, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \odot, \downarrow, \uparrow, \leq)$ práve vtedy a len vtedy, keď existujú zobrazenia $\alpha : \bigcup_{a\in A}(\{a\} \times V_a) \to L$ a $\beta : \bigcup_{b\in B}(\{b\} \times U_b) \to L$ také, že platí:

   1a α je nerastúca v druhom argumente.

   1b β je neklesajúca v druhom argumente.

   2a $Rng(\alpha)$ je infimovo hustá v L.

   2b $Rng(\beta)$ je suprémovo hustá v L.

   3 Pre každé $a \in A, b \in B, v \in V_a, u \in U_b$ platí

   $$\alpha(a, v) \geq \beta(b, u) \text{ práve vtedy a len vtedy, keď } u \bullet_{b,a} v \leq R(b, a).$$

Kapitola 4

Formálna konceptová analýza druhého rádu

Formálnu konceptovú analýzu druhého rádu popísal Krídlo vo svojej práci [7]. V tejto kapitole predvedieme jej definície a využitie.

Predstavme si nasledujúcu situáciu, kde istý futbalový klub počas leta robí kemp pre rôznych hráčov z rôznych klubov. Tí prichádzajú do kempu s cieľom zaujať svojimi futbalovými schopnosťami a vyslúžiť si tak ponuku od klubu na spoluprácu v budúcnosti. Organizátor má k dispozícii niekoľko hotelov s rôznymi službami v odlišných lokalitách a chce daných účastníkov kempu ubytovať. Hráči samozrejme majú svoje požiadavky na ubytovanie a organizátorovou úlohou je ubytovať všetkých tak, aby každý bol do istej miery spokojný. Potrebuje teda nájsť koncepty ľudí s podobnými vlastnosťami a požiadavkami, aby vedel odlíšiť koho a s kým do akého hotela ubytovať. Mali by sme teda nejakú hlavnú tabuľku hráčov a ich požiadaviek. Na vyhľadávanie konceptov v takejto tabuľke by sme mohli použiť jeden z mnohých známych algoritmov. Avšak vyskytnú sa problémy, ktoré nemožno zanedbať. Predstavme si, že by účastníkov kempu bolo vyše sto a boli by z desiatich alebo viacerých klubov. V tom prípade by sme nachádzali koncepty, v ktorých by sa nemuseli jednotliví hráči ani len poznať. A samozrejme, že nebude vhodné ubytovať do jednej izby troch ľudí, ktorí sú každý z iného klubu. Ďalšou nevýhodou je vysoký počet konceptov, ktoré by sme mohli dostať. Pri sto hráčoch je to 2^{100} možných konceptov. Potrebovali by sme ešte nejaké externé dáta, ktoré by popisovali situáciu bližšie. Uvažujme teda, že by sme mali ďalšie externé kontexty. Jedna skupina kontextov by vyjadrovala kamarátske vzťahy medzi hráčmi. Druhá skupina externých kontextov by hovorila o službách, ktoré dané hotely ponúkajú. Mali by sme teda jeden hlavný kontext s požiadavkami futbalistov, skupinu externých kontextov pre objektovú časť (kamarátstva medzi futbalistami) a skupinu externých kontextov pre atribútovú časť (hotely a ich služby). Problémom, ktorým sa zaoberá formálna konceptová analýza druhého rádu je teda to, ako vyhľadať koncepty pri takejto situácii, kedy nechceme zanedbať žiadne fakty z ktoréhokoľvek kontextu.

4.1 Formálny kontext druhého rádu

Ukázali sme situáciu, kde môžeme mať hlavný kontext a pri ňom následne aj externé kontexty, ktoré by sme chceli zohľadniť pri vyhľadávaní konceptov. Definujme teda formálny kontext vyššieho rádu:

Definícia 4.1.1 (Formálny kontext druhého rádu) Uvažujme 2 neprázdne množiny I a J a fuzzy formálny kontext $\langle\bigcup_{i\in I} B_i, \bigcup_{j\in J} A_j, r\rangle$,kde

- $B_{i_1} \cap B_{i_2} = \emptyset$ pre ľubovoľné $i_1, i_2 \in I$.
- $A_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset$ pre ľubovoľné $j_1, j_2 \in J$.
- $r : \bigcup_{i\in I} B_i \times \bigcup_{j\in J} A_j \to L$.

Navyše uvažujme 2 neprázdne množiny kontextov:

- $C_i = \langle B_i, T_i, p_i\rangle : i \in I$.
- $D_j = \langle O_j, A_j, q_j\rangle : j \in J$.

Formálny kontext druhého rádu je potom n-tica

$$\left\langle \bigcup_{i\in I} B_i, \{C_i : i \in I\}, \bigcup_{j\in J} A_j, \{D_j : j \in J\}, \bigcup_{(i,j)\in I\times J} r_{i,j} \right\rangle$$

, kde $r_{i,j} : B_i \times A_j \to L$ je definované ako $r_{i,j}(b, a) = r(b, a)$ pre ľubovoľn= $b \in B$ a $a \in A$.

Otázkou je, ako vyhľadávať koncepty v takýchto formálnych kontextoch druhého rádu. V nasledujúcej podkapitole si predstavíme spôsob, ako to možno docieliť.

4.2 Vyhľadávanie konceptov v kontextoch druhého rádu

Vyhľadávaním konceptov v kontextoch vyššieho rádu sa zaoberá vo svojom článku [7] Krídlo. V tejto podkapitole sa snažíme tento prístup priblížiť.

Už v predošlých častiach tejto kapitoly sme vyslovili požiadavku, aby sme vedeli pri hľadaní konceptov v kontextoch druhého rádu zároveň zohľadniť fakty, ktoré sú uvedené v externých dátach. Myšlienka prístupu Krídla spočíva vo vyhľadávaní bondov medzi formálnymi kontextami. Definujme si teda, čo je to bond.

Definícia 4.2.1 (Bond) *Bondom* medzi dvomi formálnymi kontextami $\langle C_i, A_i, r_i \rangle$ pre $i \in \{1, 2\}$ nazývame multifunkciu $\beta : B_1 \to \mathrm{Int}(C_2)$ taká, že $\beta^T : A_2 \to \mathrm{Ext}(C_1)$, kde $\beta^T(a_2)(b_1) = \beta(b_1)(a_2)$ pre ľubovoľné $(b_1, a_2) \in B_1 \times A_2$. (Int je intent, Ext je extent). Množinu všetkých bondov medzi kontextami C_1 a C_2 budeme označovať L-Bonds(C_1, C_2).

Bond medzi dvomi formálnymi kontextami je teda relácia medzi množinou objektov prvého kontextu a množinou atribútov druhého kontextu, taká že riadky a stĺpce relácie sú uzavreté množiny v zodpovedajúcom kontexte. Množina všetkých bondov medzi 2 kontextami s usporiadaním tvorí úplný zväz.

Formálny kontext druhého rádu sme definovali nasledovne:

$$\left\langle \bigcup_{i \in I} B_i, \{C_i : i \in I\}, \bigcup_{j \in J} A_j, \{D_j : j \in J\}, \bigcup_{(i,j) \in I \times J} r_{i,j} \right\rangle$$

.

Každý externý kontext C_i zodpovedá podmnožine objektov B_i. Takisto každý externý kontext D_j zodpovedá podmnožine atribútov A_j.

Hlavnou ideou prístupu je zobrať všetky dvojice kontextov C_i a D_j pre všetky i, j a hľadať medzi nimi bond, ktorým by sme nahradili v pôvodnom kontexte zodpovedajúcu podreláciu $r_{i,j}$. Tým by sme si zaistili to, že by sme brali do úvahy aj externé kontexty. Samozrejme, že pre každú dvojicu externých kontextov vieme nájsť veľký počet bondov. Preto je potrebné vedieť, ktorým bondom nahradíme pôvodnú reláciu a zároveň, aby sme dáta v pôvodnej relácii neodignorovali.

Krídlo v práci [7] prichádza s prístupom uvažovania najbližšieho bondu k pôvodnej relácii zhora. Ide teda o infimum všetkých bondov, ktoré sú od pôvodnej podrelácie väčšie. Dosiahneme teda to, že náš bond sa bude čo najviac podobať pôvodnej podrelácii zhora a zároveň v ňom budú zohľadnené externé kontexty.

Ak každú podreláciu $r_{i,j}$ nahradíme bondom $\beta i, j$, ktorý sme popísali, dostaneme nasledovný formálny kontext:

$$\left\langle \bigcup_{i \in I} B_i, \bigcup_{j \in J} A_j, \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \rho_{i,j} \right\rangle$$

, kde

$$\rho_{i,j} = \bigwedge \{\beta \in L\text{-Bonds}(C_i, D_j) : (\forall (b_i, a_j) \in B_i \times A_j) \beta(b_i)(a_j) \geq r_{i,j}(b_i)(a_j)\}.$$

Takýto kontext budeme nazývať *zjednodušený kontext druhého rádu.*

Všimnime si, že takýto zjednodušený kontext druhého rádu už nie je daný n-ticou, ale klasicky trojicou, pričom podrelácie pre každé i, j už netvorí pôvodná podrelácia, ale $\rho_{i,j}$. Vypadli nám taktiež externé dáta, ktoré máme zohľadnené v bondoch, ktorými sme nahradili pôvodné podrelácie $r_{i,j}$. Vzhľadom na to, že máme znovu len jeden veľký kontext bez externých dát, vieme v ňom vyhľadávať koncepty klasickými metódami a algoritmami, ktoré sú dávno známe. Navyše počet konceptov nebude taký veľký.

Otázkou ale ostáva, či nebudú chýbať externé dáta, ktoré v novom kontexte neuvažujeme. Odpoveď na túto otázku dáva nasledujúca lema 4.3.1, ktorú v práci [7] Krídlo dokazuje a jej dôsledkom je fakt, že žiadna informácia pôvodného kontextu druhého rádu sa nestratí. Navyše pôvodnú situáciu značne zjednodušuje.

Lema 4.2.1 Nech $\mathcal{K}$ je kontext druhého rádu a $\mathcal{K}'$ je zjednodušený kontext druhého rádu pre $\mathcal{K}$. Potom konceptové zväzy kontextov $\mathcal{K}$ a $\mathcal{K}'$ sú izomorfné.

Kapitola 5

Vzťah formálnej konceptovej analýzy druhého rádu k heterogénnej formálnej konceptovej analýze

V kapitole 3 sme uviedli príklad heterogénneho kontextu a načrtli problém ako sa vysporiadať s hľadaním konceptov v takýchto zložitých štruktúrach. V tejto časti práce prinášame návrh možného jednoduchého algoritmického riešenia, v ktorom sa opierame aj o známe prístupy, ktoré sme doteraz v práci uviedli.

5.1 Prevod heterogénneho kontextu na kontext vyššieho rádu

Pozrime sa najprv na definíciu heterogénneho kontextu z kapitoly 3.
Heterogénnym kontextom sa nazýva usporiadaná sedmica $\langle B, A, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \odot \rangle$, kde

- B je neprázdna množina objektov.

- A je neprázdna množina atribútov.

- $\mathcal{P} = \{\langle P_{b,a}, \leq_{b,a} \rangle : a \in A, b \in B\}$ je systém usporiadaných množín.

- $R : B \times A$ taká, že $R(b, a) \in P_{b,a}$, pre všetky $a \in A$ a $b \in B$.

- $\mathcal{U} = \{\langle U_b, \leq_{U_b} \rangle : b \in B\}$ je systém kompletných zväzov.

- $\mathcal{V} = \{\langle V_a, \leq_{V_a} \rangle : a \in A\}$ je systém kompletných zväzov.

- $\odot = \{\bullet_{b,a} : a \in A, b \in B\}$ je systém operácií, takých, že $\bullet_{b,a}$ je operácia z $U_b \times V_a$ do $P_{b,a}$ a je izotónna a zľava spojitá v oboch argumentoch.

Teda máme zložitú heterogénnu tabuľku, kde každý objekt $b \in B$ nadobúda hodnoty z kompletného zväzu U_b, každý atribút $a \in A$ nadobúda hodnoty z kompletného zväzu V_a a každá hodnota v tabuľke $R(b, a)$ nadobúda pre daný objekt a daný atribút hodnotu z $P_{b,a}$. Takisto máme k dispozícii systém konjunkcií $\odot$, ktorého príklad sme uviedli v kapitole 3.

Problém ako vyhľadávať koncepty v takejto zložitej štruktúre sa javí ako netriviálny. Doteraz známe algoritmy a postupy nie sú prispôsobené takejto situácii a neposkytujú riešenia. Preto je našou prvotnou snahou zredukovať tento problém na problém ,ktorý dokážeme riešiť. Konkrétne je cieľom našej snahy urobiť prechod z takejto zložitej štruktúry hetergénneho kontextu na jednoduchšiu vo forme formálnej konceptovej analýzy druhého rádu. Lepšie povedané potrebujeme urobiť prevod heterogénneho kontextu na kontext druhého rádu, presnejšie povedané na zjednodušený kontext druhého rádu.

Formálny kontext druhého sme v kapitole 4 definovali ako n-ticu

$$\left\langle \bigcup_{i\in I} B_i, \{C_i : i \in I\}, \bigcup_{j\in J} A_j, \{D_j : j \in J\}, \bigcup_{(i,j)\in I\times J} r_{i,j} \right\rangle$$

, kde $\langle \bigcup_{i\in I} B_i, \bigcup_{j\in J} A_j, r\rangle$ je hlavným kontextom a $\{C_i : i \in I\}$ a $\{D_j : j \in J\}$ sú externé kontexty.

Prechod z heterogénneho kontextu na kontext druhého rádu bude tvorený nasledovnými podmienkami:

- každý kompletný zväz $\langle U_b, \leq\rangle$ a $\langle V_a, \leq\rangle$ pre všetky $b \in B$ a $a \in A$ nahradíme formálnym kontextom $\langle U_b, U_b, \leq\rangle$, resp. $\langle V_a, V_a, \geq\rangle$

- každé políčko ($(b, a) \in B \times A$) v pôvodnej tabuľke, ktoré je ohodnotené hodnotou $p \in (P_{b,a}, \bullet_{b,a})$, nahradíme bondom β z 2-$Bonds(\langle U_b, U_b, \leq\rangle, \langle V_a, V_a, \geq\rangle)$, pričom platí, že $(u, v) \in R_\beta$ práve vtedy, keď $u \bullet_{b,a} v \leq p$.

Prvá podmienka hovorí o tom, že externými kontextami pre objektovú a atribútovú časť, ktoré sme uvažovali v kapitole 4 pri kontexte druhého rádu, budú teraz kontexty, ktorých objekty a atribúty budú rovnaké a budú tvorené hodnotami kompletného zväzu pravdivostných hodnôt, ktoré pre daný objekt (atribút) môže v pôvodnom kontexte nadobúdať. Reláciou medzi nimi bude $\leq$ (v prípade externých kontextov pre objektovú časť), respektíve $\geq$ (pre externé kontexty atribútovej časti). Hodnoty v externých kontextoch teda budú z klasickej množiny {0,1}. Zatiaľ čo v kapitole 4 sme hovorili o externých kontextoch, kde každý externý kontext zodpovedal jednej disjunktnej podmnožine z množiny objektov (atribútov), tak teraz bude každý externý kontext zodpovedať len jednému objektu (alebo jednému atribútu). To znamená, že ak budeme mať n objektov a m atribútov, tak dostaneme n externých kontextov pre objektovú časť a m externých kontextov pre atribútovú časť. Teda pre každé políčko v pôvodnej tabuľke budeme mať 2 externé kontexty (jeden pre objekt a jeden pre atribút). Po aplikácii prvej podmienky tak dostávame kontext druhého rádu, ktorý bude vyzerať nasledovne:

$$\langle B, \{\langle U_b, U_b, \leq\rangle : b \in B\}, A, \{\langle V_a, V_a, \geq\rangle : a \in A\}, r\rangle$$

Druhá podmienka hovorí o prevode tohto kontextu druhého rádu na klasický kontext, dokonca v dvojhodnotovej logike. Prevod sa deje rovnakým spôsobom ako sme popísali v podkapitole 4.3. To, akým bondom nahrádzame každé políčko v pôvodnej tabuľke, hovorí vzťah $(u, v) \in R_\beta$ práve vtedy, keď $u \bullet_{b,a} v \leq p$ v tejto druhej podmienke. Dostávame takýto kontext:

$$\left\langle \bigcup_{b\in B} \{b\} \times U_b, \bigcup_{a\in A} \{a\} \times V_a, R_\beta \right\rangle,$$

kde

$$R_\beta((b, u), (a, v)) \leftrightarrow u \bullet_{b,a} v \leq r(b, a).$$

O tom, že môžeme tieto dve podmienky považovať za korektné, hovoria nasledujúce lemy 5.1.1 a 5.1.2:

Lema 5.1.1 Kompletný zväz $\mathrm{CL}(\langle U_b, U_b, \leq\rangle)$ je izomorfný z kompletným zväzom $\langle U_b, \leq\rangle$.

To, že táto lema platí, priamo vyplýva z druhej časti základnej vety o konceptových zväzoch (veta 1.1.1), ktorú sme uviedli v podkapitole 1.1.

Lema 5.1.2 Bond β, kde $(u, v) \in R_\beta$ práve vtedy, keď $u \bullet_{b,a} v \leq p$ je 2-*Bond* medzi $\langle U_b, U_b, \leq\rangle$ a $\langle V_a, V_a, \geq\rangle$).

Je ľahko viditeľné, že platí takisto aj táto lema a to z dôvodu, že konjunkcia je monotónna v oboch argumentoch a teda ak nejaká dvojica $(u, v) \in U_b \times V_a$ vyhovuje nerovnosti $u \bullet v \leq p$, tak platí, že každá dvojica $(u', v') \in U_b \times V_a$, kde $u' \leq u$ a $v' \leq v$, vyhovuje danej nerovnosti. Ak prihliadneme na to, akého tvaru sú extenty, resp. intenty zmieňovaných kontextov, tak z toho jasne vidieť, že relácia medzi množinami U_b a V_a definovaná zmienenou nerovnosťou je bond medzi danými kontextami.

Ukázali sme teda ako urobiť prevod z heterogénneho kontextu na kontext druhého rádu a následne jeho prevod na klasický kontext, ktorý je síce podstatne väčší rozmerovo (čo by sa mohlo zdať neefektívne), avšak hodnoty sú v dvojhodnotovej klasickej logike, čo nám výrazne zrýchli ďalší výpočet.

Dostali sme sa k stiuácii, kde máme jeden klasický kontext, v ktorom je potrebné hľadať koncepty. Nič nám teda nebráni aplikovať na takýto kontext efektívny algoritmus pre vyhľadávanie konceptov, ktorý sme uviedli v kapitole 2. Mohlo by sa zdať, že sme na konci riešenia nášho problému, keďže vieme ako dostať koncepty. Prirodzene však netreba zabúdať na to, že nájdené koncepty budú zodpovedať klasickému kontextu, ktorý sme dostali po rôznych prevodoch. Tieto koncepty nám však veľa nepovedia o vzťahoch medzi objektmi a atribútmi v pôvodnom heterogénnom kontexte. Potrebný je spätný prevod konceptov do štruktúry heterogénnej formálnej konceptovej analýzy.

Prevod konceptov v klasickej dvojhodnotovej logike späť na heterogénne koncepty sa bude diať jednoduchými krokmi. Vzhľadom na to, že poznáme štruktúry, z ktorých sme robili prechody medzi kontextami, nie je ťažké koncepty a ich extenty rozsekať na toľko častí, koľko sme mali objektov a intenty rozsekať na toľko častí, koľko sme mali atribútov. Každá časť extentu alebo intentu bude pozostávať z toľkých hodnôt, koľko sa nachádzalo v kompletnom zväze pravdivostných hodnôt pre daný objekt alebo atribút v pôvodnom heterogénnom kontexte. Dokonca dokážeme rozpoznať, ktorá hodnota časti extentu (intentu) zodpovedá ktorej hodnote v kompletnom zväze pravdivostných hodnôt pre daný objekt (atribút). Je to dané tým, že vieme ako vyzerali bondy, ktorými sme nahrádzali políčka pôvodnej tabuľky a poznali sme objekty a atribúty týchto bondov. Tie boli tvorené hodnotami z kompletných zväzov pravdivostných hodnôt pre objekty a atribúty. Rozsekali sme teda extent a intent na niekoľko častí. Každá časť extentu alebo intentu potom bude tvoriť jednu hodnotu vo výslednom koncepte a bude zodpovedať jednému objektu, resp. atribútu.
Ostáva určiť, akú hodnotu bude reprezentovať vo výslednom koncepte daná časť extentu alebo intentu. Každá časť extentu (intentu) je tvorená niekoľkými hodnotami typu áno-nie. Ich počet, ako sme už povedali, je rovnaký ako počet hodnôt v kompletnom zväze pre daný objekt alebo atribút. V tomto prípade teda pozrieme do

kompletného zväzu a zistíme pre ktorú najvýššiu hodnotu v kompletnom zväze je priradená hodnota áno v tejto časti extentu (intentu). Táto hodnota bude potom priradená vo výslednom koncepte danému objektu (atribútu). Takýmto prevodom všetkých konceptov dostávame výsledné koncepty pre pôvodný heterogénny kontext.

Pre lepšiu orientáciu v danej teórii je našou snahou v ďalšej podkapitole ilustrovať nami danú teóriu na motivačnom príklade z kapitoly 3.

5.2 Riešenie motivačného príkladu

Pozrime sa opäť na motivačný príklad uvedený v kapitole 3. Majme heterogénny kontext, ktorý sme zobrazili tabuľkou 3.2. Spolu s kompletnými zväzmi pre každý objekt a atribút sme ju ilustrovali nasledovne:

		sla, boj, poz, exc	sla, def, ofe, exc	sla, boj, poz, exc	sla, def, ofe, exc	sla, beh, tec, exc	sla, pri, exc
		CD	SD	DM	SM	CM	FW
V, M, N	Barcelona	0	0.5	0	1	1	1
V, M, N	Chelsea	0	0	0.5	1	1	1
V, M, N	Arsenal	1	1	0	0	0	0.5
V, M, N	AC Miláno	1	1	0	0	0.5	1
V, M, N	Bayern	1	1	1	0.5	0	0

Tabuľka 3.2: Futbalové kluby a ich nároky aj so zväzmi

Máme teda tabuľku futbalových mužstiev, ktoré vyjadrujú svoj postoj (alebo lepšie povedané ľahostajnosť) k činnostiam, ktoré by mal hráč spĺňať, aby oňho klub mal záujem. Vidíme, že Barcelone sú ľahostajné činnosti útočníka (FW), ofenzívneho stredného záložníka (CM) a takisto krajného záložníka (SM). Naopak svoj dôraz kladú na činnosť stredného obrancu (CD) alebo defenzívneho stredného záložníka (DM). Menšiu ľahostajnosť majú aj voči činnosti krajného obrancu (SD). Ak to zhrnieme, tak Barcelona hľadá hráča do stredu obrany alebo zálohy, ktorý dokáže možno hrať aj na kraji obrany. Podstatné su defenzívne činnosti. Takisto Chelsea zaujímajú defenzívni hráči. Naopak Arsenal a AC Miláno sa sústreďujú na stredopoliarov a obrancovia sú im ľahostajní. Bayern Mníchov sa zasa zaujíma o útočiacich hráčov. Takisto máme k dispozícii systém konjunkcií, ktoré vyjadrujú vzťah vhodnosti činností pre daný post hráča ku danému klubu. Zopár sme ich ukázali v podkapitole 3.1. Pripomeňme si ich.

$\bullet_{\text{Barc., CD}}$	sla	boj	poz	exc
V	1	1	0	0
M	0.5	0.5	0	0
N	0	0	0	0

$\bullet_{\text{Chel., CD}}$	sla	boj	poz	exc
V	1	0	1	0
M	0.5	0	0.5	0
N	0	0	0	0

Tieto tabuľky vyjadrujú konjunkciu medzi hodnotami z kompletného zväzu pre objekt Barcelonu (resp. pre Chelsea) a hodnotami z kompletného zväzu pravdivostných hodnôt pre atribút CD. V tomto príklade sa ukazuje heterogenita požiadaviek rôznych klubov pre ten istý atribút. Vidíme, že Barcelona hľadá medzi strednými obrancami skôr dobre pozične hrajúceho stopére a menej kladie dôraz na jeho fyzické parametre. Na druhej strane Chelsea skôr dáva dôraz na fyzickú udatnosť stredného obrancu a zvádzanie osobných súbojov namiesto pozičnej či technickej zdatnosti. Pre činnosť útočníka majú oba kluby rovnaké konjunkcie medzi hodnotami, čo vyjadruje nasledovná tabuľka:

$\bullet_{\text{Barc./Chel., FW}}$	sla	pri	exc
V	1	0.5	0
M	0.5	0	0
N	0	0	0

Takýchto konjunkcií máme pre každé políčko tabuľky 3.2. Dokopy ich teda bude 30.

Pozrime sa na daný príklad z pohľadu agenta alebo manažéra niektorých z futbalistov. O svojich hráčoch prirodzene každý agent vie, aké schopnosti daní hráči majú, kde sú ich silné stránky, ale aj slabiny. Preto z týchto údajov chce agent zistiť, aké možné kombinácie schopností sú užitočné a pre aké kluby. Tým by sa dokázal zamerať na potenciálne skupinu klubov, pre ktoré by daní hráči, ktorých zastupuje, boli zaujímaví. Teda našim cieľom je hľadať koncepty v takýchto údajoch.

Riešenie sme načrtli v predchádzajúcej podkapitole. Našou snahou je prevod heterogénneho kontextu na kontext druhého rádu. Pozrime sa na prvú podmienku prevodu heterogénneho kontextu na kontext druhého rádu.

- každý kompletný zväz $\langle U_b, \leq \rangle$ a $\langle V_a, \leq \rangle$ pre všetky $b \in B$ a $a \in A$ nahradíme formálnym kontextom $\langle U_b, U_b, \leq \rangle$, resp. $\langle V_a, V_a, \geq \rangle$

Tá hovorí, že pre každý objekt a každý atribút nahradíme im priradené kompletné zväzy na kontexty v dvojhodnotovej logike.

Vezmime si objektovú časť. Všetky objekty nadobúdajú hodnoty z rovnakého kompletného zväzu tvoreného hodnotami z množiny {N - nevhodný, M - menej vhodný, V - vhodný}. Každému objektu teda priradíme externý kontext v takejto podobe:

$\leq$	V	M	N
V	×		
M	×	×	
N	×	×	×

Pozrime sa na atribútovú časť. Atribúty CD a DM majú hodnoty z rovnakého kompletného zväzu, ktorý nadobúda hodnoty z množiny {exc - excelentný, boj - bojovný, poz - pozičný, sla - slabý}. Kompletný zväz pravdivostných hodnôt a jeho tvar je znázornený v tabuľke 3.2. Oba tieto atribúty budú mať potom externé kontexty (každý z nich jeden) takéhoto tvaru:

$\geq$	sla	boj	poz	exc
sla	×	×	×	×
boj		×		×
poz			×	×
exc				×

Pre atribúty SD a SM máme kompletný zväz s hodnotami z množiny {exc - excelentný, def - defenzívny, ofe - ofenzívny, sla - slabý}, ktorý bude nahradený týmto kontextom:

$\geq$	sla	def	ofe	exc
sla	×	×	×	×
def		×		×
ofe			×	×
exc				×

Kompletný zväz pravdivostných hodnôt pre atribút CM s hodnotami {exc - excelentný, beh - behavý, tec - technický, sla - slabý} nahradíme kontextom:

$\geq$	sla	beh	tec	exc
sla	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
beh		$\times$		$\times$
tec			$\times$	$\times$
exc				$\times$

Kompletný zväz pravdivostných hodnôt pre atribút FW s hodnotami exc - excelentný, pri - priemerný, sla - slabý nahradíme kontextom:

$\geq$	sla	pri	exc
sla	$\times$	$\times$	$\times$
ori		$\times$	$\times$
exc			$\times$

Pre každý objekt a pre každý atribút máme teda definovaný jeden kontext. Dostávame teda jeden hlavný kontext (pôvodný) a externé kontexty pre objektovú časť a atribútovú časť, čo nám vo výsledku tvorí kontext druhého rádu. Zostáva nám ďalej pokračovať v prevode druhou podmienkou. Tá vyzerá nasledovne:

- každé políčko ($(b, a) \in B \times A$) v pôvodnej tabuľke, ktoré je ohodnotené hodnotou $p \in (P_{b,a}, \bullet_{b,a})$, nahradíme bondom β z 2-$Bonds(\langle U_b, U_b, \leq\rangle, \langle V_a, V_a, \geq\rangle)$, pričom platí, že $(u, v) \in R_\beta$ práve vtedy, keď $u \bullet_{b,a} v \leq p$.

Teda každé políčko pôvodnej tabuľky nahradíme bondom medzi externými kontextami pre zodpovedajúci objekt a zodpovedajúci atribút pre dané políčko. Vzťah $(u, v) \in R_\beta$ práve vtedy, keď $u \bullet_{b,a} v \leq p$ hovorí to, že ak políčko v konjunkcii zodpovedajúcej danému políčku v pôvodnej tabuľke je menšie alebo rovné ako hodnota políčka v pôvodnej tabuľke, potom padne do relácie R_β. Ilustrujme si to na našom príklade. Vezmime prvé políčko v pôvodnej tabuľke pre objekt Barcelona a atribút CD. Políčko má hodnotu 0. Konjunkcia v systéme konjunkcií pre dané políčko vyzerá nasledovne:

$\bullet_{\text{Barc., CD}}$	sla	boj	poz	exc
V	1	1	0	0
M	0.5	0.5	0	0
N	0	0	0	0

Bond, ktorým nahradíme políčko v pôvodnej tabuľke bude vyzerať nasledovne:

R_β	sla	boj	poz	exc
V			×	×
M			×	×
N	×	×	×	×

Vidíme, že $\langle V, sla\rangle \notin R_\beta$, pretože $V \bullet_{\text{Barc.,CD}} \text{sla} = 1 > p = 0$. Podobne $\langle V, boj\rangle \notin R_\beta$. Taktiež $\langle M, sla\rangle \notin R_\beta$, pretože $M \bullet_{\text{Barc.,CD}} \text{sla} = 0.5 > p = 0$. Rovnako $\langle M, boj\rangle \notin R_\beta$. Naopak všetky ostatné hodnoty v konjunjcii sú rovné hodnote 0 z pôvodnej tabuľky pre Barcelonu a atribút CD a teda patria relácii R_β.

Ukážme si ešte nahradenie políčka pre klub Chelsea a činnosť útočníka (FW) v pôvodnej tabuľke. Hodnota v tabuľke je rovná 1. Konjunkcia pre políčko vyzerá nasledovne:

$\bullet_{\text{Barc./Chel., FW}}$	sla	pri	exc
V	1	0.5	0
M	0.5	0	0
N	0	0	0

Keďže každá hodnota v konjunkcii je menšia alebo rovná jednotke, tak bond, ktorým nahradíme políčko v pôvodnej tabuľke bude vyzerať nasledovne:

R_β	sla	pri	exc
V	×	×	×
M	×	×	×
N	×	×	×

Ak takto nahradíme všetky políčka pôvodnej tabuľky dostaneme kontext v klasickej dvojhodnotovej logike rozmerov 15 × 23. Znázorňuje ho tabuľka 5.1.

		×	×			×	×			×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
		×	×	×	×	×	×			×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	×		×				×		×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	×		×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×			×	×			×	×		×		×		×	×
×	×	×	×	×	×	×	×			×	×			×	×		×		×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×			×	×		×		×			×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×			×	×		×		×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×			×	×		×		×			×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		×		×		×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Tabuľka 5.1: Prevod heterogénneho kontextu

Na tento kontext sme aplikovali efektívny algoritmus z kapitoly 2. Dostali sme koncepty, ktoré boli tvorené extentmi, ktoré pozostávali z 15 hodnôt a intenty, ktoré pozostávali z 23 hodnôt. V predošlej podkapitole sme vyslovili požiadavku na prevod týchto konceptov späť do heterogénnej štruktúry. Ilustrujme si preto prevod jedného z konceptov.

Vezmime koncept, ktorého extent a intent vyzerjú nasledovne nasledovne:
Extent:

×	×	×		×	×		×	×			×			×

Intent:

			×			×	×			×	×			×	×		×		×	×	×	×

Pozrime sa teraz ako vieme rozsekať takýto koncept a určiť, ktoré hodnoty patria ktorému políčku v pôvodnej tabuľke. Vezmime políčko v 1.riadku a 1. stĺpci pôvodnej tabuľky(teda objekt Barcelona a atribút CD). Nahrádzali sme ho bondom, ktorý mal rozmer 3 × 4. Teda prvému políčku budú zodpovedať prvé 3 hodnoty z extentu a prvé štyri hodnoty z intentu. Vzhľadom na to, že vieme aké objekty a atribúty mal bond, tak vieme aj priradiť tieto atribúty časti extentu a intentu, ktorý sme odrezali. Prvému políčku teda zodpovedá takýto extent a intent:

Extent:

V	M	N
×	×	×

Intent:

sla	boj	poz	exc
			×

Ak takto rozsekáme celý extent, dostávame:

V	M	N
×	×	×

V	M	N
	×	×

V	M	N
	×	×

V	M	N
		×

V	M	N
		×

Máme teda 5 častí, kde každá zodpovedá jednému objektu. Prvá zodpovedá prvému objektu, druhá druhému atď. Vieme aj ktoré hodnoty nejakej časti extentu zodpovedajú ktorej hodnote z kompletného zväzu pre daný objekt. Ostáva určiť, ktorú hodnotu z nich daný objekt nadobúda v konečnom koncepte. V predošlej kapitole sme vraveli, že vždy vezmeme najvyššiu hodnotu v usporiadaní kompletného zväzu, ktorej je priradená kladná hodnota. V našom prípade (vzhľadom na to, že v konjunkciách a takisto bondoch boli objekty a atribúty, ktoré boli tvorené hodnotami z kompletných zväzov, usporiadané zhora nadol vzhľadom na daný kompletný zväz) stačí, ak vezmeme prvú kladnú hodnotu zľava. Teda pre prvý objekt (Barcelona) je prvá hodnota zľava hodnota V - vhodný. Pre druhý objekt (Chelsea) je prvá kladná hodnota zľava hodnota M - menej vhodný. Pre Arsenal je to hodnota M - menej vhodný, pre AC Miláno je to hodnota N - nevhodný a takisto aj pre Bayern je to hodnota N - nevhodný.

Ak takto rozsekáme celý intent, dostávame:

sla	boj	poz	exc
			×

sla	def	ofe	exc
		×	×

sla	boj	poz	exc
		×	×

sla	def	ofe	exc
		×	×

sla	beh	tec	exc
	×		×

sla	pri	exc
×	×	×

Podobným spôsobom potom určujeme hodnoty pre dané atribúty v pôvodnom kontexte. Pre atribút CD potom dostaneme hodnoty exc - excelentný, pre atribút SD hodnotu ofe - ofenzívny, pre atribút DM hodnotu poz - pozičný, pre atribút SM hodnotu ofe - ofenzívny, pre CM hodnotu beh - behavý a pre atribút FW dostávame hodnotu sla - slabý.
Výsledný koncept bude teda vyzerať nasledovne:

{Barcelona/V, Chelsea/M, Arsenal/M, AC Miláno/N, Bayern/N}

{CD/exc, SD/ofe, DM/poz, SM/ofe, CM/beh, FW/sla}

Z tohto konceptu môžeme vyčítať to, že ak je nejaký hráč excelentným stredným obrancom, má ofenzívne kvality na kraji obrany aj na kraji zálohy, hrá dobre pozične ako defenzívny stredný záložník, je behavý na poste ofenzívneho stredného záložníka a hoci je slabý ako útočník, tak je vhodný pre klub FC Barcelona. Tá by o takéhoto hráča mala určite záujem. Trochu vhodný by bol aj pre kluby Chelsea Londýn a Arsenal Londýn. O hráča s takýmito vlastnosťami nemajú záujem kluby ako AC Miláno, či Bayern Mníchov.

Týmto spôsobom vieme prevádzať všetky koncepty späť do heterogénnej štruktúry a dostať tak koncepty pre heterogénny kontext. Pozrime sa na zopár zaujímavých konceptov, ktoré sme dokázali nájsť v našom príklade.

{ Barcelona/V, Chelsea/M, Arsenal/N, AC Miláno/N, Bayern/N }

{ CD/exc, SD/ofe, DM/poz, SM/sla, CM/sla, FW/sla}

Tento koncept vraví o tom, že hráč, ktorý je skvelým stredným obrancom, dokáže si dobre plniť ofenzívne schopnosti na kraji obrany a takisto hrá dobre pozične ako defenzívny stredný záložník (na zvyšných postoch je slabý), je vhodný pre Barcelonu. Takisto je celkom zaujímavým pre Chelsea Londýn. Ostatné kluby sa o takéhoto hráča zrejme zauímať nebudú. Jeho schopnosti nie sú pre tieto kluby potrebné.

{ Barcelona/N, Chelsea/V, Arsenal/N, AC Miláno/N, Bayern/N }

{ CD/boj, SD/exc, DM/boj, SM/sla, CM/sla, FW/sla }

Druhý koncept nám opäť ukazuje, že hráč síce neoplýva útočnými schopnosťami, ale je dobrý v osobných súbojoch ako stredný obranca, je excelentným krajným obrancom a takisto dobre zvádza osobné súboje ako defenzívny stredný obranca. Takýto hráč je vhodny pre Chelsea Londýn. Pre ostatné kluby je nezaujímavým. V týchto prvých dvoch konceptoch sa ukazuje akási odlišnosť v požiadavkách klubov Chelsea Londýn a FC Barcelona. Oba kluby sa zaujímajú o dobrých obrancov, avšak vidíme, že nie každý o rovnako hrajúcich. Prvý koncept skôr vyhovoval schopnosťami hráča Barcelone, zatiaľ čo tento druhý vyhovoval Chelsea a Barcelone vôbec.

{ Barcelona/N, Chelsea/N, Arsenal/V, AC Miláno/M, Bayern/M }

{ CD/sla, SD/sla, DM/poz, SM/exc, CM/beh, FW/pri }

V tomto nami vybratom koncepte vidíme, že hráči s excelentnými schopnosťami krajného záložníka, behavého ofenzívneho stredného záložníka a dobre pozične hrajúceho stredného defenzívneho záložníka, sú vhodní pre Arsenal Londýn a trochu vhodný pre AC Miláno a Bayern Mníchov.

{ Barcelona/N, Chelsea/N, Arsenal/N, AC Miláno/V, Bayern/N }

{ CD/sla, SD/sla, DM/poz, SM/def, CM/tec, FW/sla }

Ďalší koncept ukazuje, že pozičné a technické schopnosti stredného záložníka a defenzívne schopnosti krajného záložníka sú vhodné pre klub AC Miláno. To, že je hráč slabý v útoku alebo v obrane tento klub nezaujíma.

{ Barcelona/N, Chelsea/N, Arsenal/N, AC Miláno/N, Bayern/V }

{ CD/sla, SD/sla, DM/sla, SM/ofe, CM/beh, FW/exc }

Nakoniec posledný nami vybraný koncept ukazuje, že pre Bayern Mníchov je vhodný aj taký hráč, ktorý je síce slabý v obranných činnostiach, ale je ofenzívny na kraji zálohy, behavý v strede zálohy a excelentný ako útočník. Ostatné kluby tieto jeho schopnosti nezaujímajú. Môžme sa domnievať, že takýchto hráčov majú tieto kluby dosť.

Samozrejme, tak ako pri iných prístupoch, ani tu sa nevyhneme konceptom a situáciám, ktoré nebudú popisovať realitu alebo lepšie povedané v reálnom svete na tieto situácie nenarazíme. Vezmime si napríklad takýto koncept:

{ Barcelona/V, Chelsea/M, Arsenal/V, AC Miláno/N, Bayern/V }

{ CD/exc, SD/ofe, DM/poz, SM/ofe, CM/beh, FW/exc }

Vidíme, že hráč, ktorý je excelentný v strede obrany, výborne zvláda ofenzívne schopnosti na kraji obrany aj na kraji zálohy, dobré hrá pozične ako defenzívny stredný záložník a je behavým ofenzívnym záložníkom, navyše je excelentným útočníkom, je vhodným pre Barcelonu, Arsenal Londýn a takisto pre Bayern Mníchov. Takisto je trochu vhodným pre Chelsea Londýn. Jediné mužstvo, ktoré hráč s takýmito vlastnosťami nezaujíma je AC Miláno. Prirodzene tento koncept vraví pravdu. Avšak asi ťažko by sme dokázali nájsť hráča, ktorý by všetky tieto vlastnosti spĺňal. Najmä ak má byť excelentným na dvoch úplne odlišných postoch na ihrisku akými sú stredný obranca a útočník. Formálna konceptová analýza však predpokladá aj takéto výsledky. Našim cieľom bolo ukázať ako hľadať koncepty a súvislosti v takýchto zložitých heterogénnych štrukúrach. Tento príklad je ilustráciou našej teórie a výsledkov.

Záver

V práci sme sa zaoberali formálnou konceptovou analýzou a hľadaním konceptov v rôznych štruktúrach dát. Predviedli sme základy formálnej konceptovej analýzy a priblížili si rôzne prístupy vyhľadávania konceptov v homogénnych klasických tabuľkách ako aj fuzzifikovaných. Priblížili sme si Krajčiho prístup pre jednostranne fuzzifikované kontexty, Bělohlávkov prístup a jeho efektívny algoritmus na vyhľadávanie konceptov v homogénnych obojstranne fuzzifikovaných kontextoch a ukázali sme tiež Krídlov prístup pre vyhľadávanie konceptov v kontextoch druhého rádu. Prínosom tejto práce je náš vlastný prístup hľadania konceptov nad heterogénnymi tabuľkovými dátami, kde každý objekt a každý atribút môže byť fuzzifikovaný inak, nezávisle od ostatných. Prístup spočíval v prevode heterogénneho kontextu na kontext druhého rádu, ktorý sa následne previedol na jednoduchý, síce rozmerovo väčší kontext, avšak v dvojhodnotovej klasickej logike. Využili sme tiež efektívny Bělohlávkov algoritmus na hľadanie konceptov v tomto prevedenom kontexte. Nakoniec spätným prevodom konceptov do heterogénnej štruktúry sa získali požadované výsledné koncepty. V práci sme uvádzali nielen myšlienky rôznych prístupov, ale aj reálne príklady. Takisto sme uviedli príklad a jeho riešenie aj pri našom novom heterogénnom prístupe, ktorý by mohol byť námetom na využiteľnosť prístupu v praxi.

Zoznam použitej literatúry

[1] Krajči S.: *Cluster based efficient generation of fuzzy concepts*, Neural Network World 13 (5) (2003), pp. 521-530.

[2] Ganter B., Wille R.: *Formal Concept Analysis, Mathematical Foundations*, Springer-Verlag (1999).

[3] Bělohlávek R., De Baets B., Outrata J., Vychodil V.: *Computing the Lattice of all fixpoints of a Fuzzy Closure Operator*, IEEE Trans. Fuzzy Systems 18(3) (2010), pp. 546–557.

[4] Macek B.: *Heterogénne konceptové zväzy*, diplomová práca, 2012.

[5] Aštary M.: *Vyhľadávanie konceptov v atribútovo-heterogénnom fuzzy kontexte*, bakalárska práca, 2013.

[6] Antoni Ľ., Krajči S., Krídlo O., Macek B., Pisková L.: *On heterogeneous formal contexts*, 2012.

[7] Krídlo O., Mihalčin P., Antoni Ľ., Krajči S.: *Formal Concept Analysis of Higher Order*, CLA 2013, pp. 117–128.

[8] Krajči S.: *A Generalized Concept Lattice*, Logic Journal of the IGPL 13(5) (2005), pp. 543-550.