
KRVOPOT

2. séria, 2011/2012

Riešenia a komentáre

1 Zadanie:

Erika sa vracala z výletu. Najprv cestovala autobusom a potom pokračovala zo zastávky na bicykli. Celá cesta jej trvala presne 1 hodinu 30 minút a prešla pri nej vzdialenosť 60 km. Autobus išiel priemernou rýchlosťou 50 km/h. Určte, ako dlho išla Erika na bicykli, keď jej rýchlosť v km/h je vyjadrená prirodzeným číslom rovnako ako vzdialenosť meraná v km, ktorú prešla na bicykli.

Riešenie:

Označme v vzdialenosť v kilometroch, ktorú Erika prešla na bicykli, a r jej rýchlosť v km/h. Podľa zadania sú v a r prirodzené čísla a $v \leq 60$. Čas, ktorý cestovala Erika na bicykli, bol $x = v/r$ hodín (z čoho máme $r > 0$). Autobusom prešla vzdialenosť $(60 - v)$ km a túto vzdialenosť prešla za $(60 - v)/50$ hodín. Preto podľa zadania platí

$$\frac{60 - v}{50} + \frac{v}{r} = \frac{3}{2}.$$

Táto rovnica je ekvivalentná s rovnicou $50v - 15r - rv = 0$, ktorú môžeme ešte upraviť na tvar

$$(50 - r)(v + 15) = 15 \cdot 50 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Činitele na ľavej strane sú teda kladné a ich súčin je deliteľný 5^3 . Rozoberme preto nasledujúce štyri prípady:

- $125 = 5^3 \mid 50 - r$.

To však nie je možné, pretože $0 < 50 - r < 50$.

- $25 = 5^2 \mid 50 - r$ a $5 \mid v + 15$.

Keďže $0 < 50 - r < 50$, platí $50 - r = 25$. Odtiaľ $r = 25$, a potom $v = 15$ a $x = 15/25 = 3/5$. Erika šla teda $3/5$ hodiny (čiže 36 minút) na bicykli, čo znamená, že predtým šla autobusom 54 minút, t. j. $9/10$ hodiny. Autobusom šla tak $50 \cdot 9/10 = 45$ kilometrov a bicyklom $25 \cdot 3/5 = 15$ kilometrov, čiže spolu naozaj 60 kilometrov.

- $5 \mid 50 - r$ a $25 = 5^2 \mid v + 15$.

Keďže $15 \leq v + 15 \leq 75$, platí $v + 15 \in \{25, 50\}$, a teda $v \in \{10, 35\}$. Odtiaľ dopočítame ďalšie dve možnosti:

- Ak $v = 10$, tak $r = 20$, a potom $x = 10/20 = 1/2$. Erika šla teda $1/2$ hodiny na bicykli, čo znamená, že predtým šla autobusom 1 hodinu. Autobusom šla tak $50 \cdot 1 = 50$ kilometrov a bicyklom $20 \cdot 1/2 = 10$ kilometrov, čiže spolu naozaj 60 kilometrov.

- Ak $v = 35$, tak $r = 35$, a potom $x = 35/35 = 1$. Erika šla teda 1 hodinu na bicykli, čo znamená, že predtým šla autobusom $1/2$ hodiny. Autobusom šla tak $50 \cdot 1/2 = 25$ kilometrov a bicyklom $35 \cdot 1 = 35$ kilometrov, čiže spolu naozaj 60 kilometrov.

- $125 = 5^3 \mid v + 15$.

To však nie je možné, pretože $15 \leq v + 15 \leq 75$.

Možné časy Erikinej jazdy na bicykli sú teda $3/5$ hodiny (čiže 36 minút), $1/2$ hodiny, alebo 1 hodina.

Komentár opravovateľa (Katarína Furcoňová):

Úloha sa riešila zapísaním vzťahov zo zadania. Časť študentov ju potom riešila výpisom možností, ktorými Erika mohla cestovať, a ostatní študenti ju riešili pomocou deliteľnosti. Keďže existujú tri spôsoby, ktorými Erika mohla cestovať, za každé správne riešenie je 1 bod, takže spolu 3 body za nájdenie správnych riešení. Zvyšné 2 body som rozdelila za zápis vzťahov zo zadania úlohy a za správne odvodenie vzťahu pre určovanie vhodných riešení.

2 Zadanie:

V rámci volejbalového turnaja zohrali každé dve družstvá jeden zápas. Po skončení turnaja sa zistilo, že pre každú dvojicu družstiev možno nájsť tretie družstvo, ktoré nad oboma vyhralo. Dokážte, že turnaja sa zúčastnilo aspoň sedem družstiev.

Riešenie:

Najskôr si uvedomme, že musí existovať aspoň jedno družstvo, ktoré vyhralo aspoň toľko zápasov, koľko ich prehralo. Uvažujme o takomto družstve A . Označme \mathcal{M} množinu tých družstiev, ktoré A porazili. Nemôže byť $\mathcal{M} = \emptyset$, pretože podľa zadania, každé družstvo aspoň raz prehralo. Nech B je ľubovoľné družstvo z \mathcal{M} . Potom pre dvojicu družstiev A, B musí existovať družstvo C , ktoré porazilo aj A aj B . Musí teda byť $C \in \mathcal{M}$. To znamená, že každé družstvo $B \in \mathcal{M}$ muselo prehrať s niektorým iným družstvom z \mathcal{M} . To je možné iba ak \mathcal{M} obsahuje aspoň 3 družstvá. Teda A prehralo aspoň s tromi družstvami, čiže muselo (v súlade s jeho voľbou) aspoň s tromi družstvami vyhrať. Spolu teda muselo byť na turnaji aspoň $2 \cdot 3 + 1 = 7$ družstiev, čo sme mali dokázať.

Komentár opravovateľa (Katka Kocová Mičkaninová):

Danú úlohu vyriešili iba šiesti riešitelia, avšak všetci správne, za čo im bolo udelených plných 5 bodov. Riešenia boli názorné a často hodnotne doplnené vysvetľujúcimi ilustráciami.

3 Zadanie:

Každý mrežový bod štvorca 10×10 je zafarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že existuje dvojica vodorovných a dvojica zvislých priamok tak, že ich všetky štyri priesečníky sú zafarbené tou istou farbou.

Riešenie:

Uvažujme 9 vodorovných a 3 zvislé priamky našej štvorcovej siete. Priesečníky týchto priamok nazvime uzlové body. Na každej vodorovnej priamke máme 3 uzlové body. Tri uzlové body možno dvoma farbami zafarbiť 8 spôsobmi, teda podľa Dirichletovho princípu sa nájdu dve vodorovné priamky, kde trojice uzlových bodov sú navzájom rovnako zafarbené. Spomedzi troch bodov jednej z týchto dvoch trojíc sú opäť podľa Dirichletovho princípu dva ofarbené rovnako. Keďže druhá trojica je zafarbená rovnako, prislúchajúce body z druhej priamky majú rovnakú farbu. Úloha je tým vyriešená.

Komentár opravovateľa (Anka Polomčáková):

V každom odovzdanom riešení riešiteľ urobil aspoň náčrt dôkazu. To som ohodnotila 3 bodmi. Ak mal riešiteľ 4 body, v dôkaze mu chýbali nejaké odôvodnenia, prečo niektoré veci naozaj platia.

4 Zadanie:

Nájdite aspoň jednu trojicu prirodzených čísel väčších ako 50, ktorá je riešením rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Riešenie:

Predpokladajme, že trojice $\langle x, y, z \rangle$ a $\langle x, y, w \rangle$ sú riešeniami danej rovnice, teda platí $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ a $x^2 + y^2 + w^2 = 3xyw$. Odčítaním týchto rovníc dostaneme $z^2 - w^2 = 3xyz - 3xyw$, z čoho $(z - w)(z + w) = 3xy(z - w)$, a teda $(z - w)(z + w - 3xy) = 0$, čiže $z = w$ alebo $w = 3xy - z$. Ak je teda trojica $\langle x, y, z \rangle$ riešením rovnice zo zadania, aj trojica $\langle x, y, 3xy - z \rangle$ je jej riešením, veď platí

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (3xy - z)^2 &= x^2 + y^2 + (9x^2y^2 - 6xyz + z^2) = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + 3xy(3xy - 2z) = 3xyz + 3xy(3xy - 2z) = 3xy(3xy - z). \end{aligned}$$

Vzhľadom na symetriu pôvodnej rovnice pri predchádzajúcej úvahe nezáleží na poradí neznámych, takže vyhovujú i trojice $\langle 3yz - x, y, z \rangle$ či $\langle x, 3xz - y, z \rangle$.

Z prirodzeného riešenia $x = y = z = 1$ tak môžeme postupne vygenerovať ďalšie riešenia, a to trojice $\langle 1, 1, 2 \rangle$, $\langle 5, 1, 2 \rangle$, $\langle 5, 29, 2 \rangle$, $\langle 169, 29, 2 \rangle$, $\langle 169, 985, 2 \rangle$, $\langle 169, 985, 499393 \rangle$. V poslednej uvedenej trojici sú už všetky čísla väčšie než 50, je to teda jedno z hľadaných riešení rovnice.

Komentár opravovateľa (Martina Ivanecová):

Do riešenia tejto úlohy sa pustilo len pár riešiteľov a riešenia väčšiny z nich boli správne. Ako každý riešiteľ správne pochopil, úloha vyžadovala nájdenie len jednej trojice prirodzených čísel väčších ako 50, aj keď takýchto trojíc

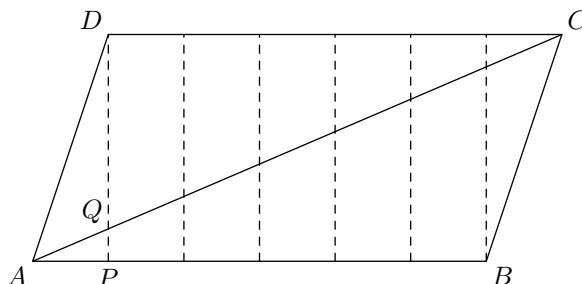
vyhovujúcich danej rovnici je viac. Niektorí riešitelia sa s týmto typom rovnice už stretli a správne poznamenali, že ide tzv. Markovovu diofantovskú rovnicu. Najkrajšie riešenia mali Babej, Bogár a Svetlík.

5 Zadanie:

Nech n je prirodzené číslo, P je taký bod strany AB rovnobežníka $ABCD$, že $|AP| = \frac{|AB|}{n}$, a Q je priesečník priamok AC a DP . Dokážte, že platí $|AQ| = \frac{|AC|}{n+1}$.

Riešenie:

Rozdelme strany AB a CD na n rovnakých častí a pospájajme ich ako na obrázku.



Trojuholníky AQP a CQD sú podobné podľa vety uu , pretože uhly AQP a DQP sú vrcholové (a teda zhodné) a uhly PAQ a DCQ sú striedavé (a teda taktiež zhodné). Z tejto podobnosti potom platí, že $\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AP|}{|CD|}$.

Keďže $ABCD$ je rovnobežník, platí $|AB| = |DC|$. Zo zadania vieme, že $|AP| = \frac{|AB|}{n}$, preto môžeme ďalej písať

$$\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AP|}{|CD|} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{\frac{|AB|}{n}}{|AB|} = \frac{1}{n},$$

z čoho $|CQ| = n|AQ|$.

Bod Q leží na úsečke AC , preto platí $|AC| = |AQ| + |CQ| = |AQ| + n|AQ| = |AQ|(n+1)$. Odtiaľ teda dostávame, že $|AQ| = \frac{|AC|}{n+1}$, čo bolo treba dokázať.

Komentár opravovateľa (Andrea Kanáliková):

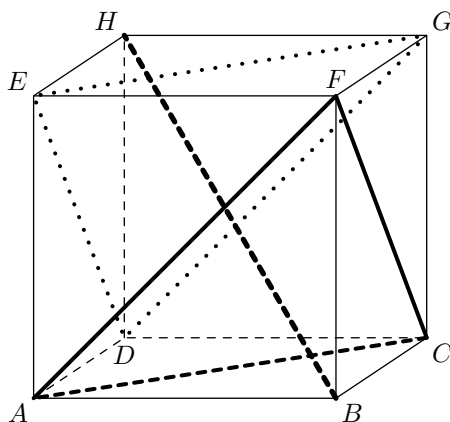
Z počtu riešení, ktoré sa nám dostali do rúk, usudzujeme, že slovíčko „dokážte“ ešte stále študentov odrádza. V riešeníach sa objavili dva typy dôkazov. Vo vzorovom riešení sme sa inšpirovali riešením Derňára a Janovcovej. Ostatní riešitelia zvolili podobný dôkaz. Medzi ďalšie pekné riešenia patria riešenia Svetlíka, Góblovej a Duníka.

6 Zadanie:

Dokážte, že telesová uhlopriečka kocky je kolmá na všetky stenové uhlopriečky s ňou mimobežné.

Riešenie 1:

Označme kocku $ABCDEFGH$ a dĺžku jej hrany a . Umiestnime ju do súradnicovej sústavy tak, aby platilo $A = \langle 0, 0, 0 \rangle$, $B = \langle a, 0, 0 \rangle$, $C = \langle a, 0, a \rangle$, $D = \langle 0, 0, a \rangle$, $E = \langle 0, a, 0 \rangle$, $F = \langle a, a, 0 \rangle$, $G = \langle a, a, a \rangle$, $H = \langle 0, a, a \rangle$.



Vzhľadom na symetriu sa stačí zaoberať jednou telesovou uhlopriečkou. Vezmime teda telesovú uhlopriečku HB a k nej všetky stenové uhlopriečky, ktoré sú s ňou mimobežné, t. j. AC , CF , FA , EG , ED a GD . Keďže dvojice stenových uhlopriečok ležiace v rovinách protifašných stien sú rovnobežné, stačí ukázať kolmosť HB len na jednu z dvojice, napríklad $AC \perp HB$, $CF \perp HB$, $FA \perp HB$. V tejto súradnicovej sústave majú príslušné vektory súradnice $\vec{u} = B - H = (a, -a, -a)$, $\vec{v} = C - A = (a, 0, a)$, $\vec{w} = F - C = (0, a, -a)$, $\vec{z} = F - A = (a, a, 0)$. Urobíme príslušné skalárne súčiny:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, -a, -a) \cdot (a, 0, a) = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = (a, -a, -a) \cdot (0, a, -a) = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{z} = (a, -a, -a) \cdot (a, a, 0) = 0.$$

To teda znamená, že vektor \vec{u} je kolmý na \vec{v} , \vec{w} i \vec{z} , t. j. $HB \perp AC$, $HB \perp CF$, $HB \perp AF$.

Riešenie 2:

Označme kocku $ABCDEFGH$. Vzhľadom na symetriu sa stačí zaoberať jednou jej telesovou uhlopriečkou. Zoberme teda v kocke $ABCDEFGH$ napríklad telesovú uhlopriečku HB a stenové uhlopriečky AC , CF , FA , EG , ED a GD , ktoré sú s ňou mimobežné. Podobne ako v riešení 1 stačí ukázať kolmosť BH len na AC , CF a FA . Lahko vidieť, že AC a FA vzniknú z CF otočením okolo osi BH o uhol $\pm \frac{360^\circ}{3}$. Vzhľadom na túto symetriu teda stačí dokázať kolmosť BH na CF :

Hrana AB je kolmá na rovinu CBF , a pretože CF patrí do roviny CBF , je AB kolmá na CF , teda aj CF je kolmá na AB . Zároveň je CF kolmá na GB , čo znamená, že CF je kolmá na rovinu GBH . A pretože HB leží v rovine GBH , je CF kolmá na HB .

Komentár opravovateľa (Jana Chudá):

Počet riešení 1 a 2 bol zhruba rovnaký. Úlohu riešilo 23 študentov. Body sa pohybovali od troch do piatich. Väčšinou sa strácali body za to, že riešitelia sa nezmenili o všetkých mimobežných stenových, prípadne telesových uhlopriečkach.
