
KRVOPOT

4. séria, 2008/2009

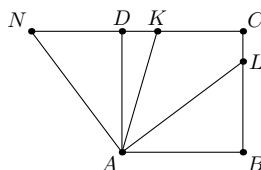
Riešenia a komentáre

1 Zadanie:

V štvorci $ABCD$ je K ľubovoľný bod strany DC a os uhla $\sphericalangle BAK$ pretína stranu BC v bode L . Dokážte, že platí $|BL| + |KD| = |AK|$.

Riešenie:

Uvedieme dve riešenia:

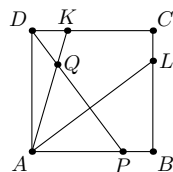


Nech N je bod taký, že $\triangle ADN$ vznikol otočením $\triangle ABL$ okolo bodu A (zrejme o 90°). Keďže $|\sphericalangle LAN| = 90^\circ$ a $|\sphericalangle DAN| = |\sphericalangle LAB| = |\sphericalangle LAK|$, platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ANK| &= |\sphericalangle AND| = 90^\circ - |\sphericalangle NAD| = 90^\circ - |\sphericalangle LAB| = \\ &= 90^\circ - |\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle LAN| - |\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle NAK|, \end{aligned}$$

trojuholník $\triangle AKN$ je teda rovnoramenný so základňou AN . Platí preto

$$|AK| = |NK| = |ND| + |KD| = |BL| + |KD|.$$



Nech P je bod úsečky AB taký, že $DP \perp AL$ a nech Q je priesečník DP a AK . Keďže AL je os uhla $\sphericalangle QAP$ a QP je na ňu kolmá, body P a Q sú podľa nej súmerné, a teda $\triangle PAQ$ je rovnoramenný so základňou PQ , z čoho máme $|AQ| = |AP|$.

Keďže $|\sphericalangle QKD| = |\sphericalangle QAP|$ (striedavé uhly) a $|\sphericalangle KQD| = |\sphericalangle AQP|$ (vrcholové uhly), $\triangle DKQ$ je podľa vety uu podobný s $\triangle PAQ$, a teda je tiež rovnoramenný, a to so základňou DQ . Z toho máme $|QK| = |KD|$.

A keďže $DP \perp AL$ (tak sme P zvolili), a tiež $DA \perp AB$ a $AP \perp BL$, podľa podľa vety uu sú $\triangle DAP$ a $\triangle ABL$ podobné. Sú dokonca zhodné, pretože $|DA| = |AB|$, z čoho máme $|AP| = |BL|$.

Celkovo teda dostávame

$$|AK| = |AQ| + |QK| = |AP| + |KD| = |BL| + |KD|.$$

Komentár opravovateľa (Majka Petrejčíková):

Väčšina riešiteľov (dvaja z troch) si zvolila neočakávanú, ale elegantnú cestu riešenia. Dĺžky úsečiek v dokazovanom vzťahu vyjadrila pomocou goniometrických funkcií (z pravouhlých trojuholníkov $\triangle ADK$ a $\triangle ALB$), a potom už len upravila ľavú i pravú stranu použitím súčtových goniometrických vzťahov.

Veľmi pekné riešenie odovzdal M. Derňár, ktorý sa zaoberal aj špeciálnymi prípadmi (keď $K = D$ a $K = C$).

2 Zadanie:

Z nádoby so štyrmi zafarbenými guľkami budeme so zavretými očami jedenkrát losovať, čiže buď z nej vyberieme jednu guľku, alebo naraz niekoľko guľiek (v tom prípade však nie je možné rozlíšiť ich poradie). Koľkými farbami a v akom počte treba guľky zafarbiť, koľko guľiek sa má losovať a ako treba rozdeliť možné výsledky losovania medzi dvoch hráčov tak, aby mal prvý šancu vyhrať práve dvakrát väčšiu ako druhý? Je nevyhnutné použiť štyri farby? Ak nie, aký je minimálny počet farieb?

Riešenie:

Množinu všetkých možností, ktorými môže skončiť losovanie, chceme rozdeliť do dvoch (disjunktných) množín reprezentujúcich víťazstvo hráčov A alebo B . Hráč A má mať dvakrát väčšiu šancu na výhru. Predpokladajme, že je každá guľka inej farby (ak by to tak nebolo, rovnako zafarbené guľky očísľujeme). Vtedy sú všetky možnosti rovnako pravdepodobné. Preto množina (hráča) A má byť dvakrát väčšia ako množina (hráča) B , a teda počet všetkých možností má byť násobkom čísla 3.

Počet možností závisí od počtu losovaných guľiek. Sú to postupne 4, 6, 4 a 1 možnosť pre losovanie jednej, dvoch, troch a štyroch guľiek. Len v prípade losovania dvoch guľiek je počet možností násobkom čísla 3. Je teda nevyhnutné losovať dve guľky.

Ak každú guľku zafarbíme inou farbou, získame šesť rôznych výsledkov. Priradením ľubovoľných štyroch z nich hráčovi A a zvyšných dvoch hráčovi B zabezpečíme hráčovi A dvakrát väčšiu šancu na výhru.

Našli sme také zafarbenie, spôsob losovania zo štyroch guľiek a rozdelenie výsledkov také, že hráč A má dvakrát väčšiu šancu ako hráč B .

Otázka je, či na zafarbenie guľiek nestačí menší počet farieb. Vtedy jeden výsledok bude tvoriť viac možností, ktoré zrakom nebude možné od seba odlíšiť. Hráčovi priradíme výsledok zrakom odlíšiteľný od iného (napríklad obe vylosované guľky budú modré), nie jednotlivé možnosti (napríklad vylosovanie prvej a druhej modrej guľky alebo vylosovanie prvej a tretej modrej guľky). Preto pri vytváraní množín A a B zo vzniknutých možností je potrebné dodržať podmienku (*), že *nerozlíšiteľné možnosti sa nachádzajú v tej istej množine (A alebo B)*.

Ak použijeme jednu farbu, získame šesť možností, ktoré nie sú zrakom rozlíšiteľné, a teda ich nie je možné rozdeliť do dvoch množín, aby bola splnená podmienka (*) a zároveň podmienka (**), že *množina A má štyri prvky a množina B má dva prvky*.

Ak použijeme dve farby, napr. bielu a modrú, pričom (bez ujmy na všeobecnosti) modrých guľiek bude aspoň toľko ako bielych, biele guľky označíme B_i a modré M_i , sú možné dva spôsoby zafarbenia: $\{B_1, M_1, M_2, M_3\}$ (ak je jedna guľka biela a tri modré) a $\{B_1, B_2, M_1, M_2\}$ (ak sú dve guľky biele a dve modré). V prvom prípade vznikajú možnosti: $\{B_1, M_1\}$, $\{B_1, M_2\}$, $\{B_1, M_3\}$, $\{M_1, M_2\}$, $\{M_1, M_3\}$, a $\{M_2, M_3\}$. V druhom prípade ide o možnosti $\{B_1, B_2\}$, $\{B_1, M_1\}$, $\{B_1, M_2\}$, $\{B_2, M_1\}$, $\{B_2, M_2\}$, a $\{M_1, M_2\}$. Len v druhom však vieme rozdeliť možnosti na dve množiny tak,

aby boli splnené obe podmienky (*) a (**): Hráčovi A priradíme štyri výsledky tvaru $\{B_i, M_j\}$ (t. j. rôznofarebné guľky) a hráčovi B dva výsledky $\{B_1, B_2\}$ a $\{M_1, M_2\}$ (t. j. rovnofarebné guľky).

Podarilo sa zafarbiť guľky tak, aby hráč A mal dvakrát väčšiu šancu ako hráč B . Na zafarbenie guľiek teda stačia dve farby.

Komentár opravovateľa (Majka Kolková):

Úlohu bolo možné začať riešiť uvažovaním o počte použitých farieb alebo o počte vylosovaných guľiek. Riešitelia väčšinou začínali počtom farieb.

V jednom riešení sa objavila zaujímavá úvaha o losovaní náhodného počtu guľiek (prípadne s nejakým obmedzením).

Všetci riešitelia si správne uvedomovali rozdiel medzi matematicky rozlíšiteľnými možnosťami a zrakom rozlíšiteľnými výsledkami losovania.

3 Zadanie:

To, že Sherlock je vynikajúci detektív, sa po Londýne rozšírilo už dávno, preto si preňho niektorí ľudia chystávali rôzne úlohy. Na jednom plese si k nemu prisadli tri tanečné páry. Každý mu povedal, ako sa volá, a ešte niečo navyše:

- „Volám sa Betka. Poviem vám, že každá z nás tancuje s chlapcom, ktorý je o tri roky starší.“
- „Ja som Igor. Nie je tajomstvom, že my šiesti dokopy máme 115 rokov.“
- „Moje meno je Júlia a spolu s Igorom máme 36 rokov.“
- „Dovoľte mi predstaviť sa. Volám sa Andrej a s Júliou máme spolu 40 rokov.“
- „Ja som Martin a prezradím vám, že Daniela je z nás šiestich najmladšia.“
- „Ja som Daniela. Vedzte, že každý z nás má celočíselný počet rokov a naše veky sú rôzne.“

„Viete na základe týchto informácií zistiť, kto s kým tancuje?“, spýtali sa ho na záver tanečníci spoločne. Sherlock po chvíli odpovedal. Zistíte aj vy, ktoré dvojice sediace pri stole boli taneční partneri. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie:

Medzi partnermi je rozdiel tri roky, a teda súčet ich vekov je nepárny. Júlia má s Igorom i s Andrejom párný súčet rokov, a teda môže tancovať jedine s Martinom. Keďže Daniela je najmladšia, môže mať za partnera jedine mladšieho z chlapcov Igor a Andrej. Súčet Júliinho veku s Igorom je menší než s Andrejom, preto je mladší Igor. Danielin partner je teda Igor a Betkin Andrej. Z tvrdení Igora, Júlie a Andreja je možné zostaviť tri rovnice podávajúce informáciu o vekoch všetkých ľudí. Vnesením informácie o rozdieloch vekov párov získame len tri neznáme v týchto rovniciach a vyriešením tohto systému máme jediné riešenie, a to Júlia 17, Martin 20, Daniela 16, Igor 19, Betka 20 a Andrej 23 rokov. Toto riešenie však nevyhovuje druhej časti tvrdenia Daniela, a teda niekto musel klamať. Sherlock zrejme upozornil, že lživé informácie mu znemožňujú správne odpovedať, a musíme tak urobiť aj my.

Komentár opravovateľa (Jaro Šupina):

Úvod riešenia vyššie je až na menšie detaily opísaný priamo z riešenia Stanislava Jakubca a je to asi najbleskovejšia úvaha použitá v riešeniach k nájdeniu jediného možného riešenia, ktoré však nie je v zhode s Danieliným tvrdením. Všetci riešitelia zvládli vymyslieť úvahu, ktorá ich k tomu

doviedla. Určitá časť z nich však zabudla alebo nedostatočne overila, či dané popárovanie je v zhode so všetkými tvrdeniami. Toto bol jediný dôvod zníženia bodového hodnotenia.

4 Zadanie:

Dva rotačné valce majú výšky 64 cm a 27 cm. Plášť každého z nich má rovnaký obsah ako podstava toho druhého. V akom pomere sú ich objemy?

Riešenie:

Označme polomery základní valcov postupne r_1 a r_2 a ich (známe) výšky $v_1 = 64$ cm a $v_2 = 27$ cm. Podľa zadania $\pi r_2^2 = \pi r_1 v_1$ a $\pi r_1^2 = \pi r_2 v_2$, z čoho $r_2^2 = r_1 v_1$ a $r_1^2 = r_2 v_2$. Z toho dostávame

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \frac{r_1 r_1^2}{r_2 r_2^2} = \frac{r_1 r_2 v_2}{r_2 r_1 v_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

a teda

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{\frac{v_2}{v_1}} = \sqrt[3]{\frac{27 \text{ cm}}{64 \text{ cm}}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}.$$

Ľahko vidieť, že v takom prípade sú rovnosti požadované v zadaní naozaj platné. Ostáva vypočítať pomer objemov:

$$\frac{\pi r_1^2 v_1}{\pi r_2^2 v_2} = \frac{r_1^2 v_1}{r_2^2 v_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot \frac{v_1}{v_2} = \left(\sqrt[3]{\frac{v_2}{v_1}}\right)^2 \cdot \frac{v_1}{v_2} = \sqrt[3]{\frac{v_1}{v_2}} = \sqrt[3]{\frac{64 \text{ cm}}{27 \text{ cm}}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}.$$

Komentár opravovateľa (Stano Krajčí):

Úloha nenarobila riešiteľom väčšie problémy. Jedna z tých, ktorí nezískali päť bodov, použila nesprávny vzorec, ďalší nesprávne zaobchádzali s (často predčasne) zaokrúhlenými číslami.

5 Zadanie:

Janko má veľmi rád cereálie Cini Minis, okrem iného aj preto, že v každom balení je momentálne ukrytá jedna zo série šiestich postavičiek z rozprávky Madagaskar. Chce mať čím skôr celú sériu, ale mama mu dovoľí kúpiť denne len jedno balenie. Obchod, v ktorom Janko nakupuje, každý deň objedná 6 balení Cini Minis, pričom v každom balení je iná postavička, a každý deň sa všetkých 6 balení rozpredá. Koľko dní môže Janko očakávať, že bude kupovať tieto cereálie, kým nazbiera celú sériu?

Riešenie:

Opakovanie kúpy balenia s náhodnou postavičkou tak dlho, až získame celú sériu, možno rozdeliť na šesť po sebe nasledujúcich fáz. Nachádzanie sa v j . fáze ($j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) znamená, že Janko zatiaľ nazbieral j rôznych postavičiek a čaká na ďalšiu z $6 - j$ ešte nezískaných.

Zistíme, kedy a s akou pravdepodobnosťou bude dĺžka j . fázy k dní: Bude to práve vtedy, keď v predchádzajúcich $k - 1$ dňoch bude Jankov pokus neúspešný, ale v k . deň úspešný bude. Keďže (každým dni j . fázy) úspech nastáva s pravdepodobnosťou $\frac{6-j}{6}$ a teda neúspech s pravdepodobnosťou $\frac{j}{6}$ (zo 6 pokusov je $6 - j$ priaznivých, a teda j nepriaznivých), celková pravdepodobnosť, že j . fáza bude mať práve k dní, bude $p_{j,k} = \left(\frac{j}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6-j}{6}$. Priemerná dĺžka j . fázy teda bude (lebo tento rad konverguje)

$$d_j = \sum_{k=1}^{\infty} k p_{j,k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{j}{6}\right)^{k-1} \frac{6-j}{6} = \frac{6-j}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{j}{6}\right)^{k-1}.$$

Ak $u \in [0, 1)$, tak platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k u^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) u^k = \sum_{k=0}^{\infty} u^k + \sum_{k=1}^{\infty} u^k + \sum_{k=2}^{\infty} u^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} u^k = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(u^n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} u^{k-n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(u^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u^k \right)^2 = \left(\frac{1}{1-u} \right)^2. \end{aligned}$$

Keďže v našom prípade $u = \frac{j}{6} \in [0, 1)$, platí

$$d_j = \frac{6-j}{6} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{j}{6}} \right)^2 = \frac{6}{6-j}.$$

Priemerná dĺžka d celkového čakania bude súčtom priemerných dĺžok čakání v jednotlivých šiestich fázach, takže

$$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14,7.$$

Pre zaujímavosť dodajme, že sme tento pokus robili so študentmi Akadémie Pedagogickej v poľskom Krakove. Zúčastnilo sa ho 52 študentov a každý z nich sa na Janka zahral 10-krát, celkovo sme teda simulovali 520 „Jankov“. Priemerný počet opakovaní „kúp“ bol 14,68.

Komentár opravovateľa (Janka Pócsová):

Je nám ľúto, že do riešenia tejto úlohy sa zapojilo tak málo z vás. Predpokladali som, že úloha vás zaujme rovnako ako zaujala nás, keďže často mnohí výrobcovia sa snažia zvýšiť predajnosť svojich produktov práve tým, že do ich obalov prikladajú rôzne cenné či menej cenné veci, či sľubujú veľké výhry za vyzbieranie prezentov. Zaujímavou otázkou je, či sa nám oplatí zapojiť sa do takejto súťaže.

Pre študentov učiteľského smeru: Skúste zopakovať tento pokus aj so žiakmi na strednej škole. (Na simuláciu možno použiť hraciu kocku.)

6 Zadanie:

Majka má k dispozícii 11-minútové a 7-minútové presýpacie hodiny. Vie pomocou týchto hodín odmerať 15 minút? Napíšte, ako má postupovať. Kolikominútové vajíčka vie uvariť iba s pomocou týchto hodín? (Hodiny môže spustiť aj predtým, ako začne vajíčka variť.)

Riešenie:

Jednotlivé časy, ktoré vieme odmerať, budeme zaznamenávať ako usporiadanú dvojicu (k, l) , pričom k je zostávajúci čas na 7-minútových presýpacích hodinách a l je zostávajúci čas na 11-minútových presýpacích hodinách. Na začiatku máme stav $(7, 11)$. Po presypaní 7-minútových hodín dostaneme stav $(0, 4)$. Ak začneme variť vajíčka v tomto okamihu, tak vieme odmerať 4 minúty a tiež $(7n+4)$ minúty nasledovným opakovaným otáčaním 7-minútových hodín. Po stave $(0, 4)$ sa dostaneme do stavu $(3, 0)$, a to tak, že najprv otočíme 7-minútové hodiny, a sme v stave $(7, 4)$ a po dosypaní 11-minútových hodín sme v stave $(3, 0)$. Vieme teda uvariť 3-minútové vajíčka, a podobne ako predtým aj $(7n+3)$ -minútové. Zo stavu $(3, 0)$ sa postupnosťou $(3, 11)$, $(0, 8)$, $(7, 8)$ dostaneme do stavu $(0, 1)$, a vieme uvariť $(7n+1)$ -minútové vajíčka. Z $(0, 1)$ prejdeme do $(7, 1)$ a do $(6, 0)$ – vieme uvariť $(7n+6)$ -minútové vajíčka. Zo $(6, 0)$ do $(6, 11)$

a do $(0, 5)$ – vieme uvariť $(7n+5)$ -minútové vajíčka. A nakoniec z $(0, 5)$ do $(7, 5)$ sa dostaneme do $(2, 0)$, a máme postup na varenie $(7n+2)$ -minútových vajíčok. Z jednotlivých stavov, do ktorých sme sa dostali, je zrejmé, že vieme uvariť hocikol'kominútové vajíčko, keďže každé prirodzené číslo sa dá zapísať v tvare $7n+k$, kde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Keďže pri našom postupe musíme čakať až 21 minút, kým začneme variť naše 15-minútové vajíčko. Uvedieme efektívnejší postup: V stave $(0, 4)$, t. j. po uplynutí 7 minút, začneme variť vajíčko, počkáme, kým sa dosypú 11-minútové hodiny, a otočíme ich ešte raz. Keď sa dosypú, máme odmeraných $4+11=15$ minút.

Komentár opravovateľa (Inga Semanišínová):

Niektorí riešitelia presne neodôvodnili, že sa dajú uvariť hocikol'kominútové vajíčka, alebo nepopísali celkom jasne, ako bude varenie vajíčka vyzeráť.

Najkrajšie riešenie mali Ivana Čarnogurská, Marek Derňár a Ján Jerguš.
