KRVOPOT

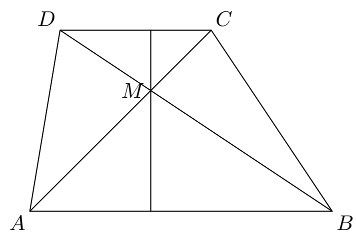
3. séria, 2008/2009

Riešenia a komentáre

1 Zadanie:

Lichobežník $ABCD$ so základňami $|AB| = a$, $|CD| = a/2$ a výškou v je svojimi uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky. Určte, v akom pomere sú ich obsahy.

Riešenie:



Určme najskôr obsahy trojuholníkov $\triangle ABM$ a $\triangle CDM$. Keďže $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle DMC|$ (vrcholové uhly) a $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MCD|$ (striedavé uhly) sú podľa vety uu uvažované trojuholníky podobné s koeficientom podobnosti 2 (lebo $|AB| = a = 2\frac{a}{2} = 2|CD|$). Potom $|M, \overleftrightarrow{AB}| = \frac{2}{3}v$ a $|M, \overleftrightarrow{CD}| = \frac{2}{3}v$, a teda pre jeden zo zisťovaných pomerov dostávame

$$\frac{\mathrm{S}(ABM)}{\mathrm{S}(CDM)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |M, \overleftrightarrow{AB}|}{\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |M, \overleftrightarrow{CD}|} = \frac{\frac{1}{2}a\frac{2}{3}v}{\frac{1}{2}\frac{1}{2}a\frac{1}{3}v} = 4.$$

Keďže z tejto podobnosti dostávame aj $|AM| = 2|CM|$ a $|BM| = 2|DM|$, pre zvyšné dva trojuholníky platí

$$\frac{\mathrm{S}(AMD)}{\mathrm{S}(CMD)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |D, \overleftrightarrow{AC}|}{\frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |D, \overleftrightarrow{AC}|} = \frac{|AM|}{|CM|} = 2$$

a

$$\frac{\mathrm{S}(BMC)}{\mathrm{S}(DMC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BM| \cdot |C, \overleftrightarrow{BD}|}{\frac{1}{2} \cdot |DM| \cdot |C, \overleftrightarrow{BD}|} = \frac{|BM|}{|DM|} = 2.$$

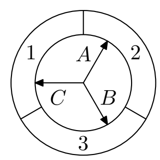
Obsahy trojuholníkov sú teda v pomere $4 : 2 : 1 : 2$.

Komentár opravovateľa (Majka Petrejčíková):

Väčšina riešiteľov pri vyjadrení obsahov štyroch trojuholníkov lichobežníka $ABCD$ vychádzala z faktu, že obsahy trojuholníkov $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$ sú rovnaké, keďže majú spoločnú stranu AB a výšku na túto stranu. To im umožnilo vyhnúť sa očakávanému riešeniu s využitím podobnosti.

2 Zadanie:

Rekvizitou v hre je losovací nástroj zobrazený na obrázku. Spodný nepohyblivý terč je rozdelený na tri rovnako veľké sektory označené číslami 1, 2 a 3. Otáčajúci sa horný (menší) terč má tri šípky, A, B a C, ktoré ho rozdeľujú na tri rovnako veľké sektory. Prvý hráč si zvolí jednu z troch šípok. Zo šípok, ktoré zostali, si jednu zvolí druhý hráč. Potom sa roztočí horný terč. Víťazí ten, koho šípka po zastavení terča ukáže na väčšie číslo. Na víťazstvo ktorého hráča (toho, ktorý vyberá šípku ako prvý, alebo toho, ktorý šípku vyberá ako druhý) by ste stavili?



Riešenie:

Sú tri rovnako pravdepodobné možnosti, ako sa môže zastaviť horný terč. Dve šípky, ktoré si zvolili hráči, môžu ukazovať na sektory s číslami 1 a 2, 2 a 3, alebo 3 a 1. Z týchto troch prípadov v dvoch (1 a 2, 2 a 3) vyhráva hráč, ktorého šípka je vpravo od šípky protihráča. V jednom prípade (3 a 1) vyhráva hráč so šípkou naľavo.

O polohe šípky vzhľadom na protihráčovu rozhoduje druhý hráč. Ak si vyberie šípku vpravo, vyhrá s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$, pretože všetky tri možné prípady sú rovnako pravdepodobné (vyplýva to z rovnakej veľkosti jednotlivých sektorov na terči). Ak si vyberie šípku vľavo od protihráčovej, vyhrá s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$. Ak sa druhý hráč rozhoduje racionálne, vyberie si šípku vpravo od šípky prvého hráča, aby mal väčšiu šancu vyhrať, a teda treba staviť na jeho víťazstvo.

(Tu dodajme, že predpoklad racionálnosti rozhodovania druhého hráča je trochu silný, možno sa hráč správa náhodne, prípadne zámerne riskuje. V takom prípade však nedokážeme povedať nič.)

Komentár opravovateľa (Majka Kolková):

Vo všetkých riešeniach chýbalo zdôvodnenie, že rovnaká pravdepodobnosť troch možností vyplýva z rovnakej veľkosti sektorov na oboch terčoch.

V jednom riešení autor uvažoval o smere otáčania. Ten nie je dôležitý, dôležitý je len stav po zastavení terča. Viaceré riešenia rozlišovali, či si prvý hráč vyberie šípku A, B, alebo C, prípadne uvažovali o jednej konkrétnej, no neuviedli, že na výbere šípky nezáleží.

V zadaní nebolo uvedené, že hráči sa správajú racionálne. Azda to bolo nedostatkom zadania. V tomto prípade však správne riešenie vyžaduje uvedomenie si, že správanie druhého hráča je otázne. Zohľadnenie tohto bolo hodnotené jedným bodom.

Tejto komplikácii sa vyhli riešitelia, ktorí predpokladali, že budú tipovať až po výbere šípok hráčmi. Je pravda, že čas uzatvárania stávky mal byť v zadaní daný. V jednom prípade riešiteľ postrehol obe možnosti (pred a po výbere šípok), čo treba oceniť.

---

3 Zadanie:

Stretol som sa s troma manželskými pármi – Annou, Elenkou, Julkou, Andrejom, Emilom a Jozefom. Nechceli však prezradiť, kto ku komu patrí, avšak nakoniec mi povedali aspoň toto:

- Jozef: Meno každej manželky začína tým istým písmenom ako meno jej manžela.

- Emil: Meno nijakého z manželov nezačína tým istým písmenom ako meno jeho manželky.
- Julka: Anna je manželkou Andreja.
- Andrej: Moja manželka je Julka.
- Elenka: Doteraz odznelo viac nepravdivých informácií ako pravdivých.
- Anna: Doteraz odznelo viac nepravdivých informácií ako pravdivých.
- Andrej: Annin manžel hovorí pravdu.

Dokážete už teraz určiť mená manželských párov, ak navyše viete, že len jeden z manželskej dvojice hovorí pravdu, druhý klame?

Riešenie:

Ak by mal Jozef hovoriť pravdu, tak podľa jeho výroku by Anna bola Andrejovou manželkou, a teda Julkino tvrdenie by bolo pravdivé. Ale podľa Jozefovho tvrdenia i Julka má byť Jozefovou manželkou, čo je spor, lebo obaja by mali rovnaké pravdivostné hodnoty svojich výrokov. Preto Jozef klame.

Počet všetkých možných párovaní je rovný počtu všetkých bijekcií množiny $\{\text{Anna}, \text{Elenka}, \text{Julka}\}$ na množinu $\{\text{Andrej}, \text{Emil}, \text{Jozef}\}$, teda 6. Keďže Jozef klame, vieme okamžite vylúčiť bijekciu zachovávajúcu iniciálky mien. Preverením zvyšných piatich bijekcií zistíme, že systému výrokov vyhovujú dve bijekcie, a to $\{\langle\text{Anna}, \text{Andrej}\rangle, \langle\text{Elenka}, \text{Jozef}\rangle, \langle\text{Julka}, \text{Emil}\rangle\}$ a $\{\langle\text{Anna}, \text{Jozef}\rangle, \langle\text{Elenka}, \text{Andrej}\rangle, \langle\text{Julka}, \text{Emil}\rangle\}$. To však znamená, že nevieme určiť mená manželských párov.

Komentár opravovateľa (Jaro Šupina):

Podstatou úlohy bolo uvedomiť si, že existujú aspoň dve popárovania, ktoré vyhovujú celému systému výrokov v úlohe. To si väčšina riešiteľov všimla. Nie každý však explicitne uviedol odpoveď na otázku v úlohe, za čo sa síce nakoniec nebrali body, ale nie je to jednoznačná voľba. Okrem uvedeného riešenia bolo častým prípadom i prechádzanie pravdivostných hodnôt výrokov jednotlivých ľudí a vylučovanie niektorých bijekcií takýmto spôsobom. Tu bolo možné stretnúť mnohé cesty, akými sa dalo vydať, a obdivovať šikovnosť jednotlivých riešiteľov pri vytváraní sporov.

---

4 Zadanie:

Drevený kváder je 6 cm vysoký, m cm široký a n cm dlhý, pričom m a n sú kladné celé čísla a $m > n > 1$. Najprv je celý povrch tohto kvádra natretý modrou farbou a potom je kváder rozdelený na $6mn$ jednotkových kociek. Presne jedna polovica z nich nemá zafarbenú žiadnu stenu. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu čísla n.

Riešenie:

Uvedomme si, že odobratie ofarbených kociek spôsobí zmenšenie každého rozmeru o 2 cm, dostaneme teda kváder rozmerov 4 cm, $(m-2)$ cm a $(n-2)$ cm, plný nezafarbených kociek. Tých je teda $4(m-2)(n-2)$, čo je polovica celkového počtu $6mn$, a teda platí $2 \cdot 4(m-2)(n-2) = 6mn$. Úpravou dostávame vzťah

$$m = \frac{8n-16}{n-8} = \frac{(8n-64)+48}{n-8} = 8 + \frac{48}{n-8}.$$

Hľadáme najväčšie n také, že $m > n$ a m je prirodzené číslo. Zo vzťahu $m > n$ máme nerovnicu $8 + \frac{48}{n-8} > n$, po jej vyriešení spolu s podmienkou $n > 0$ dostávame $15 > n$ alebo $n = 1$. Najväčšie číslo, ktoré prichádza do úvahy, je 14. Vtedy $m = 8 + \frac{80}{16-8} = 16$, čo je prirodzené číslo väčšie od 14. A naozaj, kváder takýchto rozmerov má $6 \cdot 14 \cdot 16 = 1344$ jednotkových kociek, kým nezafarbených kociek bude $4 \cdot 12 \cdot 14 = 672$, čo je polovica. Hľadané číslo n je teda 14.

Komentár opravovateľa (Stano Krajči):

Taktickou chybou mnokých riešiteľov bolo, že nevyjadrili m v závislosti od n, ale naopak. Potom sa museli odvolávať na (nie celkom pravdivé) tvrdenie, že s rastúcim m klesá n, ktoré však nedokazovali.

Mnohí riešitelia neurobili skúšku, t. j. neoverili, že kváder nájdených rozmerov naozaj vyhovuje.

---

5 Zadanie:

V pekárni z jednej dávky cesta upečú šesticu sladkých rožkov s hrozienkami. Do každej dávky cesta pridávajú šesť hrozienok. Aká je pravdepodobnosť, že medzi týmito šiestimi rožkami bude aspoň jeden bez hrozienka? Aká je pravdepodobnosť, že vami kúpený rožok bude bez hrozienka (za predpokladu, že vyberáte jeden z tejto šestice)?

Riešenie:

- Najprv sa zaoberajme otázkou *Aká je pravdepodobnosť, že medzi týmito šiestimi rožkami bude aspoň jeden bez hrozienka?*.

  Najprv vypočítame, aká je pravdepodobnosť udalosti A, že aspoň v jednom rožku nebude hrozienko. V prvom rade je nutné vhodne zvoliť pravdepodobnostný priestor. Predpokladajme, že hrozienka sú očíslované od 1 do 6. Jedna dávka cesta sa rozdelí na 6 rovnakých častí (sú to časti s rovnakým objemom). Rozdelenie hrozienok do častí je rovnomerné, teda jedno hrozienko sa dostane do jednej časti s pravdepodobnosťosťou $\frac{1}{6}$. Ďalej predpokladáme, že rozmiestnenie hrozienok do častí cesta je na sebe nezávislé (to, kam sa dostane prvé hrozienko, neovplyvňuje putovanie druhého hrozienka). Uvažujme, že samotné „napečenie“ rožkov zakódujeme šesticou $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$, kde $h_i \in \{1, \dots, 6\}$ a h_i označuje číslo rožku, do ktorého sa dostalo i. hrozienko. Každá takáto šestica zodpovedá jednému konkrétnemu „napečeniu“ šiestich rožkov. Napríklad šestica $(2, 5, 1, 5, 3, 6)$ znamená, že hrozienko číslo 1 sa dostalo do druhého rožku, hrozienko číslo 2 do piateho rožku, hrozienko číslo 3 do prvého rožku, atď. (Prípadnou vhodnou simuláciou by mohol byť hod šiestimi rozpoznateľnými kockami.) V takto zvolenom pravdepodobnostnom priestore majú všetky elementárne javy (konkrétne šestice) rovnakú pravdepodobnosť. Pravdepodobnosť teda bude podielom počtu priaznivých možností a počtu všetkých možností.

  Všetkých usporiadaných šestíc (t. j. všetkých zobrazení zo 6-prvkovej množiny do 6--prvkovej množiny) je 6^6 (na prvú pozíciu môžem zvoliť 6 čísel, na druhú tiež 6 čísel, atď.). V našom prípade jav A je reprezentovaný množinou všetkých usporiadaných šestíc, ktoré spĺňajú podmienku, že existuje také číslo r (číslo rožku), $r \in \{1, \dots, 6\}$, že pre každé $i \in \{1, \dots, 6\}$ platí $h_i \neq r$ (žiadne hrozienko sa nedostane do rožku s číslom r), napr. $(2, 3, 6, 1, 1, 4) \in A$ $(r = 5)$ a $(3, 4, 5, 1, 2, 6) \notin A$. Najprv určíme pravdepodobnosť opačnej udalosti A^c k udalosti A, a to, že v každom rožku bude hrozienko, a potom využijeme dobre známy vzťah $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c)$. Udalosť A^c pozostáva z usporiadaných šestíc, v ktorých sa vyskytujú čísla všetkých rožkov. Keďže máme rovnaký počet hrozienok aj rožkov, udalosť A^c pozostáva zo všetkých prostých postupností (t. j. ak $i \neq j$, tak $h_i \neq h_j$). Prvé hrozienko má 6 možností na výber rožku. Keďže po jeho výbere je už jeden z rožkov obsadený, druhé hrozienko má k dispozícií už iba 5 rožkov, tretie iba 4, štvrté 3, piate 2, a šiestemu ostáva posledný neobsadený rožok. Spolu teda máme $6!$ možností. Potom platí $\mathrm{P}(A^c) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}$, a teda $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = \frac{319}{324} \approx 0,985$.

- Ďalšou otázkou je *Aká je pravdepodobnosť, že si kúpim rožok bez hrozienka?*. Vieme už, že konkrétna usporiadaná šestica predstavuje jedno „napečenie", t. j. rozmiestnenie hrozienok v rožkoch. Kúpu rožka z jedného „napečenia" potom reprezentuje sedmica $(n; h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$, kde $n \in \{1, \ldots, 6\}$ a $h_i \in \{1, \ldots, 6\}$ a h_i označuje číslo rožku, do ktorého sa dostalo i. hrozienko. Napríklad sedmica $(1; 5, 6, 1, 3, 5, 2)$ znamená, že som kúpil prvý rožok, v ktorom bolo tretie hrozienko. Priaznivému usporiadaniu teda zodpovedá taká sedmica, v ktorej prvá zložka je rôzna od všetkých ostatných zložiek. Všetkých takýchto sedmíc je 6^7 a tých, ktoré vyhovujú požadovanej podmienke, že n je rôzne od všetkých h_i, je $6 \cdot 5^6$. Pretože všetky sedmice sú rovnako pravdepodobné, hľadaná pravdepodobnosť bude $\frac{6 \cdot 5^6}{6^7} = \frac{5^6}{6^6} \approx 0,33$.
  Teda pravdepodobnosť, že kúpim rožok bez hrozienka (za podmienok, ktoré špecifikuje zadanie úlohy), je okolo 33%.

Komentár opravovateľa (Janka Pócsová):

Väčšina z vás si zvolila nevhodný pravdepodobnostný priestor. Najčastejšie volené boli štruktúry, ktorá pozostávali z piatich núl a šiestich jednotiek. No má to malý háčik: tieto elementárne javy nemajú rovnakú pravdepodobnosť. Teda nie je možné využiť vlastnosti platiace pre klasický pravdepodobnostný priestor.

Na ozrejmenie celej si uveďme jednoduchý príklad: Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma mincami padne rub a líce? Úvaha typu, že keďže máme 3 možnosti, a to dva ruby, dve líca, rub a líce, pravdepodobnosť je $\frac{1}{3}$, je nesprávna, pretože tieto možnosti nemajú rovnakú pravdepodobnosť. Ak však zvolíme pravdepodobnostný priestor pozostávajúci z rovnako pravdepodobných udalostí rub+rub, rub+líce, líce+rub, líce+líce, pravdepodobnosť, že padne rub a líce je $\frac{2}{4}$.

Pre lepší vhľad do problému navrhujeme pre riešiteľov ešte jedno malé cvičenie: Pravdepodobnosť, ktorej udalosti je väčšia: že pri hode dvoma kockami padne súčet sedem, alebo že padne súčet osem?

---

6 Zadanie:

Janka napíše na papier číslicu 1 alebo 0. Jaro napíše za ňou opäť 0 alebo 1. Ďalej sa striedajú, pričom na papieri sa nemôže objaviť trojica číslic 000 ani 111 tesne za sebou. Víťazí ten, kto ako prvý dosiahne na papieri prirodzené číslo deliteľné 9 (0 na začiatku je povolená). Nájdite vyhrávajúcu stratégiu pre jedného z nich.

Riešenie:

Číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Keďže naše číslo sa skladá iba z jednotiek a núl, tak aby bolo deliteľné deviatimi, musí obsahovať najmenej deväť jednotiek. Na počte núl nezáleží, lebo tie nijako neovplyvňujú ciferný súčet. Najmenší kladný prirodzený násobok deviatich je samotné číslo deväť, teda vyhrá ten hráč, ktorý napíše deviatu jednotku.

Aby sme našli výhernú stratégiu, musíme sa snažit ovplyvniť súperove ťahy v náš prospech. Keď sa nám to podarí, môžeme hru smerovať tak, aby sme vyhrali. Lepšiu pozíciu má preto Jaro, ktorý sa zariadi podľa toho, čo dá Janka. Ak ona začne 1, Jaro dá tiež 1. V tomto momente hrajú podmienky hry v prospech Jara – keďže nemôžu ísť tri nuly ani tri jednotky za sebou, Janka musí dať nulu. Ak dá Jaro tiež nulu, má ju v hrsti, lebo ona už musí dať jednotku. Takto to ďalej pokračuje: Jaro využíva „opakovaciu stratégiu" -– opakuje po Janke a tým ju núti meniť číslo. Hra teda vyzerá pred posledným Jarovým ťahom 110011001100110 (ak Janka začala 1) alebo 00110011001100110 (ak Janka začala 0). V tejto chvíli, keď je napísaných už osem jednotiek, Jaro po Janke prestane opakovať, dá 1, a tým pádom vyhral. Výherná stratégia teda existuje pre druhého hráča – pre Jara.

Ak 0 považujeme za prirodzené číslo, tak Janka môže zvíťaziť jednoducho napísaním čísla 0.

Komentár opravovateľa (Inga Semanišinová):

Niektorí riešitelia neporozumeli, že nájsť víťaznú stratégiu znamená nájsť taký postup v hre, ktorým vyhráme vždy, nech urobí náš súper akýkoľvek krok. Túto stratégiu bolo potrebné presne popísať. Všetci 5-bodoví mali pekné riešenie.