
KRVOPOT

2. séria, 2008/2009

Riešenia a komentáre

1 Zadanie:

Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné ôsmimi, ktorých ciferný súčet (v desiatkovej sústave) sa rovná siedmim a ciferný súčin (v desiatkovej sústave) sa rovná šiestim.

Riešenie:

Keďže ciferný súčin hľadaných čísel je 6, jeho cifry môžu byť iba delitele čísla 6, t. j. 1, 2, 3 a 6. Máme dve možnosti:

- Ak číslo obsahuje cifru 6, zvyšné cifry už môžu byť len jednotky. Keďže ciferný súčet je 7, takáto zvyšná jednotka je jediná. Číslo má teda práve dve cifry, a to 1 a 6. Keďže má byť deliteľné 8, je párne, na mieste jednotiek teda môže byť iba 6. Do úvahy teda prichádza iba číslo 16, ktoré je naozaj deliteľné 8.
- Ak číslo obsahuje cifru 3, vzhľadom na svoj ciferný súčin 6 musí obsahovať aj cifru 2. Zvyšné cifry už môžu byť len jednotky, a keďže ciferný súčet je 7, takéto jednotky sú práve dve. Číslo teda obsahuje práve cifry 3, 2, 1 a 1. Keďže má byť deliteľné 8, je párne, na mieste jednotiek teda môže byť iba 2. Do úvahy teda prichádzajú iba čísla 1132, 1312 a 3112, z ktorých sú deliteľné 8 iba druhé a tretie.
- Ak číslo obsahuje cifru 2, vzhľadom na svoj ciferný súčin 6 musí obsahovať aj cifru 3. Tým sa však dostávame presne k predchádzajúceho prípadu, ktorý sme už rozobrali.

Hľadané čísla sú tri, a to 16, 1312 a 3112.

Komentár opravovateľa (Rado Engel):

Úlohu riešilo 18 študentov, väčšina z nich úlohu vyriešila bezchybne, prípadne pri rozpisovaní možností zabudli na nejaké prípady alebo urobili chybnú úvahu.

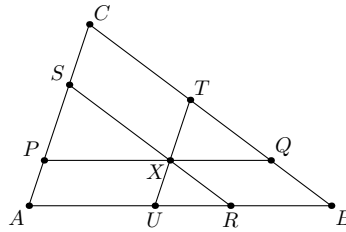
Najkrajšie riešenia mali študenti Marek Derňár, Martin Gamčík, Adela Kupková, Jana Puciová a Michaela Vrbjarová.

2 Zadanie:

Na strane AB trojuholníka $\triangle ABC$ ležia body U a R , na strane BC body Q a T a na strane CA body S a P tak, že $PQ \parallel AB$, $RS \parallel BC$, $TU \parallel CA$ a všetky tri úsečky PQ , RS a TU prechádzajú tým istým bodom. Dokážte, že

$$\frac{|PQ|}{|AB|} + \frac{|RS|}{|BC|} + \frac{|TU|}{|CA|} = 2.$$

Riešenie:



Vzhľadom na rovnobežnosť priamok, na ktorých ležia príslušné strany, sú trojuholníky $\triangle ARS$, $\triangle UBT$ a $\triangle PQC$ podobné trojuholníku $\triangle ABC$. Z týchto podobností vyplýva

$$\frac{|RS|}{|BC|} = \frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AU| + |UR|}{|AB|},$$

$$\frac{|TU|}{|CA|} = \frac{|UB|}{|AB|} = \frac{|UR| + |RB|}{|AB|},$$

$$\frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{|PX| + |XQ|}{|AB|} = \frac{|AU| + |RB|}{|AB|}$$

(keďže $AUXP$ a $RBQX$ sú rovnobežníky), a teda

$$\begin{aligned} \frac{|PQ|}{|AB|} + \frac{|RS|}{|BC|} + \frac{|TU|}{|CA|} &= \frac{|AU| + |RB|}{|AB|} + \frac{|AU| + |UR|}{|AB|} + \frac{|UR| + |RB|}{|AB|} = \\ &= \frac{2(|AU| + |UR| + |RB|)}{|AB|} = \frac{2|AB|}{|AB|} = 2, \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

Komentár opravovateľa (Jožo Seky Sekerák):

Túto úlohu riešili štyria študenti a všetci ju vyriešili správne a pekne.

3 Zadanie:

Veľkú kocku sme vytvorili z 27 jednotkových kociek. Odoberte z nej 10 jednotkových kociek tak, aby vzniknuté teleso malo rovnaký povrch ako pôvodná veľká kocka.

Riešenie:

Nazvime *kockoidným* teleso zložené z jednotkových kociek tak, že každé dve jeho susediace jednotkové kocky majú spoločnú jednotkovú štvorcovú stenu. Uvedomme si, že ak z takéhoto telesa odoberieme jednu jednotkovú kocku tak, že sa zvyšok nerozpadne, vzniknuté teleso je tiež kockoidné. Navyše ak odoberaná kocka susedí s k ďalšími kockami (kde $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), do celkového povrchu prispieva svojimi zvyšnými $6 - k$ jednotkovými štvorcovými stenami. Po jej odobratí sa teda povrch telesa najprv zmenšil o $6 - k$ jednotkových štvorcových stien, ale vzápätí sa zvýšil o jej zvyšných k jednotkových štvorcových stien, ktorými bola napojená na zvyškové teleso. Celkovo sa teda povrch telesa zmenil o $-(6 - k) + k = 2k - 6$ jednotkových štvorcov, pričom ostalo kockoidným.

Samotná úloha má viacero riešení, na ukážku uvádzame jedno z nich. Z veľkej kocky, ktorá je podľa predpokladu kockoidná, budeme odoberať jednotkové kocky v týchto troch fázach:

1. Odoberieme postupne všetkých osem rohových kociek. Keďže navzájom nesusedia a každá z nich susedila s 3 ďalšími jednotlivými kockami zvyškového telesa (hoci vždy iného), podľa úvodnej úvahy sa povrch vzniknutého telesa voči povrchu pôvodnej kocky nezmenil.
2. Z prednej steny odoberieme okrajovú (hranovú) kocku, ktorá susedí s 2 ďalšími kockami útvaru vzniknutého vo fáze 1. Podľa úvodnej úvahy sa povrch vzniknutého telesa voči povrchu telesa z fázy 1, a teda i voči povrchu pôvodnej kocky, zmenil o $2 \cdot 2 - 6 = -2$ jednotkové štvorce.
3. Z prednej steny odoberieme bývalú stredovú kocku, ktorá susedí so 4 ďalšími kockami útvaru vzniknutého vo fáze 2. Podľa úvodnej úvahy sa povrch vzniknutého telesa voči povrchu telesa z fázy 2 zmenil o $2 \cdot 4 - 6 = 2$ jednotkové štvorce, teda voči povrchu pôvodnej kocky sa vôbec nezmenil.

Výsledné teleso, vzniknuté odobratím 8 kociek, má teda rovnaký povrch ako pôvodná veľká kocka.

Komentár opravovateľa (Marián Buxár):

Väčšina riešiteľov mala úlohu správne. Jeden riešiteľ však uviedol riešenie bez slovného komentára, ďalší dvaja nevysvetlil poriadne, ktoré kocky odoberajú.

Najkrajšie riešenia mali Monika Gulašiová a Marek Derňár.

4 Zadanie:

Tri lúky porastené trávou rovnakej hustoty a rýchlosti rastu majú plochy $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha a 24 ha. Prvá lúka stačí na kŕmenie 12 volov po 4 týždne, druhá pre 21 volov po 9 týždňov. Pre koľko volov stačí tretia lúka po 18 týždňov?

Riešenie:

Podľa Adely Kupkovej:

Zaveďme nasledujúce označenie pre i . lúku:

- z – počet objemových jednotiek trávy na (každom) hektári (každej z lúk) na začiatku,
- r – počet objemových jednotiek trávy, ktorá narastie na (každom) hektári (každej z lúk) za (každý) týždeň,
- s – počet objemových jednotiek trávy, ktoré spasia (každý) vôl za (každý) týždeň,

Ďalej pre $i \in \{1, 2, 3\}$ označme:

- p_i – plochu i . lúky v hektároch,
- v_i – počet volov na i . lúke,
- t_i – počet týždňov, počas ktorých tieto voly spású celú i . lúku.

Všetky tieto hodnoty sú zrejme kladné.

Na lúke s rozlohou p_i je na začiatku $p_i z$ objemových jednotiek trávy a každý týždeň pribudne $p_i r$ objemových jednotiek trávy, spolu teda lúka za t_i týždňov poskytne $p_i z + p_i r t_i = p_i(z + t_i r)$ objemových jednotiek trávy. Za týchto t_i týždňov spasia jeden vôl $v_i s$ objemových jednotiek trávy, v_i volov teda spasia $t_i v_i s$ objemových jednotiek trávy. Keďže tak spású lúku úplne, platí rovnosť $p_i(z + r t_i) = t_i v_i s$.

Dostávame tak sústavu troch rovníc:

- $3\frac{1}{3}(z + 4r) = 4 \cdot 12 \cdot s = 48s,$
- $10(z + 9r) = 9 \cdot 21 \cdot s = 189s,$
- $24(z + 18r) = 18v_3s,$

úlohou je pritom zistiť hlavne hodnotu v_3 . Po odčítaní 3-násobku prvej rovnice od druhej dostávame $50r = 45s$, z čoho $r = 0,9s$. Z druhej rovnice potom $10z = 189s - 90r = 189s - 81s = 108s$, teda $z = 10,8s$. Po dosadení do tretej rovnice dostávame $24(10,8s + 0,9s) = 18v_3s$, z čoho po vydelení kladným s máme lineárnu rovnicu $24(10,8 + 0,9) = 18v_3$ s riešením $v_3 = 36$.

Aby bolo riešenie úplné však treba ukázať, že situácia zo zadania môže nastať, za sporných predpokladov totiž môže byť počet volov úplne ľubovoľný. Ľahko však vidíme, že pri voľbe $s = 10$, $r = 9$, $z = 108$ je všetko v poriadku.

Hľadaný počet volov je teda 36.

Komentár opravovateľa (Stano Krajčí):

Niektorí riešitelia si neuvedomili, že tráva postupne dorastá, nemožno teda mechanicky použiť priamu úmernosť (resp. trojčlenku).

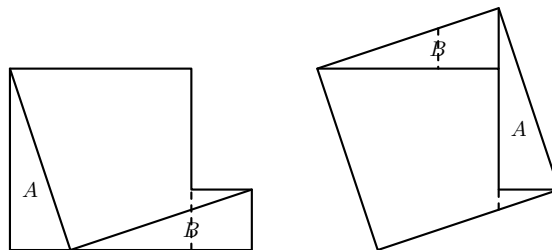
Najkrajšie riešenie mali Marek Derňár, Adela Kupková (tá však zabudla urobiť skúšku) a Marek Šafárik (ten si však úlohu zbytočne nesprávne zjednodušil predpokladom, že vól zožerie za týždeň iba kilo trávy).

5 Zadanie:

Dokážte, že ľubovoľný počet štvorcov môže byť rozstrihaný na mnohouholníkové časti tak, aby sa z týchto častí (bezo zvyšku) dal poskladať jeden nový štvorec.

Riešenie:

Úlohu dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na počet štvorcov. Ak je daný jeden štvorec, tak celý bude hľadaným mnohouholníkom, nemusíme nič strihať. Predpokladajme, že ak máme daných p štvorcov, kde $p \geq 1$, tak ich vieme rozstrihať na mnohouholníkové časti a z nich poskladať jeden štvorec. Dokážeme teraz, že tvrdenie platí pre $p+1$ štvorcov: Vezmime si nejaké dva z týchto $p+1$ štvorcov. Tie vieme rozstrihať (strihaním I) na mnohouholníkové časti a zložiť z nich štvorec, napr. podľa postupu naznačeného na obrázkoch:



(Ďalšie možnosti sú na <http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html>.) Novovzniknutý štvorec spolu s ostatnými $p-1$ štvorcami už podľa indukčného predpokladu vieme (strihaním II) rozstrihať na mnohouholníkové časti a zložiť z nich štvorec. Časti výsledného strihania budú potom prienkami strihaní I a II (tie s neprázdnyimi vnútromi), čo však budú zrejme tiež mnohouholníky. Tým sme tvrdenie dokázali.

Komentár opravovateľa (Inga Semanišínová):

Úlohu riešili len traja, z toho dvaja riešitelia vypočítali veľkosť strany štvorca, ktorý bude mať rovnaký obsah ako súčet obsahov daných štvorcov. V znení úlohy však bol požadovaný dôkaz, že štvorce môžu byť postrihané na mnohoholníkové časti a z nich zložený nový štvorec. Z výpočtu strany nevyplýva, ako budú štvorce rozstrihané a či sa to vôbec dá.

Najkrajšie riešenie mal Marek Derňár.

6 Zadanie:

Každá kreditná karta je jednoznačne identifikovateľná podľa 16-ciferného čísla. Prvých 15 cifier priradí karte banka, ktorá ju vydáva. Posledná cifra (nazývaná tiež kontrolná) je vytvorená z predchádzajúcich 15 cifier takým spôsobom, aby počítač mohol skontrolovať, či bolo počas transakcie číslo na karte prečítané správne. Väčšina spoločností vydávajúcich kreditné karty používa systém nazývaný *Codabar* na priradenie kontrolnej cifry. Postupuje sa takto:

1. Spočítajte cifry na nepárnych pozíciách daného 15-ciferného čísla (začínate prvou cifrou naľavo). Výsledok vynásobte dvomi. Dostanete číslo A .
2. Spočítajte cifry na párnych pozíciách. Dostanete číslo B .
3. Číslo C je počet cifier na nepárnych pozíciách, ktoré sú väčšie ako 4.
4. Nech $D = A + B + C$. Najmenšie číslo, ktoré musíme pripočítať k číslu D , aby sme dostali násobok čísla 10, je kontrolnou cifrou.

Zistite, či pomocou takto vytvorenej kontrolnej cifry počítač môže odhaliť, že došlo pri čítaní k dvom najčastejšie sa vyskytujúcim chybám:

1. nesprávne prečítanie jednej cifry v čísle,
2. zámena dvoch susedných cifier v čísle.

Riešenie:

Počítač zistí, že zle prečítal číslo na kreditnej karte, ak mu neseď kontrolná cifra s kontrolnou cifrou uvedenou na karte.

1. Pýtame sa, či ak počítač zle prečíta práve jednu cifru v čísle na karte, odhalí to pomocou kontrolnej cifry? Inými slovami, spôsobí zmena práve jednej cifry v čísle na karte zmenu kontrolnej cifry? Ukážeme, že áno.
 - Ak sa zmení cifra na párnej pozícii pri čítaní čísla na kreditnej karte, tak sa zmení aj cifra na mieste jednotiek v čísle B , a teda aj v čísle D , z čoho vyplýva, že sa zmení aj kontrolná cifra.
 - Ak sa zmení cifra na nepárnej pozícii pri čítaní čísla na kreditnej karte a zmenená aj pôvodná cifra sú obe z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, resp. z množiny $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, tak sa zmení aj cifra na mieste jednotiek v čísle A , a teda aj kontrolná cifra. Ak je pôvodná cifra z intervalu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ a zmenená z intervalu $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, resp. naopak, tak sa môže stať, že číslo A bude mať v oboch prípadoch rovnakú cifru na mieste jednotiek, ale číslo C bude o 1 väčšie, resp. menšie ako pôvodné, a teda aj kontrolná cifra sa zmení.
2. Pýtame sa, či ak počítač zle prečíta číslo na kreditnej karte tak, že pri čítaní navzájom vymení práve dve susedné cifry, odhalí to pomocou kontrolnej cifry? Stačí, ak overíme, či rozdiel čísla D pre pôvodné číslo na karte a čísla D pre zle prečítané číslo na karte

nie je násobkom 10. Označme ľubovoľné susedné cifry a, b . Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že cifra a je na nepárnej pozícii.

- Nech $a, b < 5$. Keďže C (a ostatné cifry) sa nemenia, stačí uvažovať rozdiel $(2a + b) - (a + 2b) = a - b$. Keďže a a b sú cifry, číslo $a - b$ bude násobkom čísla 10, iba ak $a = b$.
- Prípád $a, b \geq 5$ vedie k rovnakému výsledku ako pre $a, b < 5$.
- Nech $a < 5$ a $b \geq 5$. Potom C sa zmenší o 1, stačí teda uvažovať rozdiel $(2a + b) - (2b + a + 1) = a - b - 1$. Ten bude násobkom čísla 10, iba ak $a = b + 1$ (čo je nemožné) alebo ak $a = 0$ a $b = 9$.
- Nech $a \geq 5$ a $b < 5$. Potom C sa zväčší o 1, stačí teda uvažovať rozdiel $(2a + b + 1) - (2b + a) = a - b + 1$. Uvažujme rozdiel $(2a + b + 1) - (2b + a) = a - b + 1$. Tento rozdiel bude násobkom čísla 10, iba ak $a = b - 1$ (čo je nemožné) alebo ak $a = 9$ a $b = 0$.

Ukázali sme, že kontrolná cifra vytvorená vyššie uvedeným spôsobom odhalí každú chybu nesprávneho prečítania práve jednej cifry v čísle na karte a tiež odhalí chybu zámény dvoch susedných cifier, ak nejde o zámenu cifier 0 a 9. Aby kontrolná cifra zabezpečila dokonalé odhalenie aj tejto chyby, banky by mali priradiť kartám iba čísla, v ktorých sa cifry 0 a 9 vyskytujú vedľa seba len v jednom poradí, napr. 09.

Komentár opravovateľa (Inga Semanišínová):

Traja zo štyroch riešiteľov získali za riešenie plný počet bodov. Jeden riešiteľ rozobral len niektoré konkrétne prípady úlohy.

Najkrajšie riešenie mali všetci 5-bodoví.
