

---

# KRVOPOT

## 1. séria, 2008/2009

### Riešenia a komentáre

---

#### 1 Zadanie:

Nájdite najmenšie prirodzené číslo  $x$  také, aby každé z čísel  $x$ , 616, 700, 924 bolo deliteľom súčiny ostatných troch.

#### Riešenie:

Podľa Mareka Derňára:

Podľa zadania platia nasledujúce vzťahy:

- $x \mid 616 \cdot 700 \cdot 924$ , z čoho vyplýva, že  $x$  je kladné.
- $616 \mid 700 \cdot 924 \cdot x$ , čiže  $2^3 \cdot 7 \cdot 11 \mid (2^2 \cdot 5^2 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11) \cdot x$ , a to zrejme platí pre každé  $x$ .
- $700 \mid 616 \cdot 924 \cdot x$ , čiže  $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \mid (2^3 \cdot 7 \cdot 11) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11) \cdot x$ , z čoho  $5^2 \mid 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot x$ . Keďže 5 a  $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2$  sú nesúdeliteľné, nutne  $5^2 \mid x$ .
- $924 \mid 616 \cdot 700 \cdot x$ , čiže  $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \mid (2^3 \cdot 7 \cdot 11) \cdot (2^2 \cdot 5^2 \cdot 7) \cdot x$ , z čoho  $3 \mid 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot x$ . Keďže 3 a  $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$  sú nesúdeliteľné, nutne  $3 \mid x$ .

Keďže  $x$  je deliteľné  $5^2$  aj 3, je deliteľné aj ich najmenším spoločným násobkom, a to 75. Najmenším takým prirodzeným číslom je práve 75, ktoré, ako sa ľahko presvedčíme, spĺňa všetky štyri požadované vzťahy.

#### Komentár opravovateľa (Majka Petrejčíková):

Najčastejšou chybou bolo jednak zamlčanie skutočnosti, že hľadáme prirodzené číslo (inak by aj číslo  $-75$  vyhovovalo), chýbajúce odôvodnenie (alebo aspoň jeho náznak) faktu, že nájdené riešenie je najmenším prirodzeným číslom, a tiež chýbajúca skúška správnosti (teda spätné overenie získaného riešenia).

---

#### 2 Zadanie:

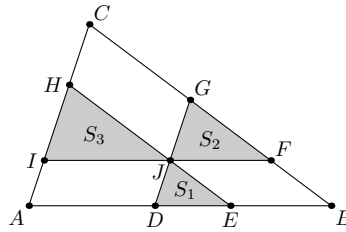
Vnútrotným bodom trojuholníka s obsahom  $S$  vedme rovnobežky ku každej zo strán. Tým rozdelíme trojuholník na tri rovnobežníky a tri trojuholníky. Obsahy týchto trojuholníkov označme  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Dokážte, že potom platí

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}.$$

#### Riešenie:

Najprv si uvedomme, že ak sú dva trojuholníky  $\triangle ABC$  a  $\triangle DEF$  podobné s koeficientom  $k$ , tak pre pomer ich obsahov  $S$  a  $P$  platí

$$\frac{P}{S} = \frac{\frac{1}{2}|FD||DE| \sin |\sphericalangle FDE|}{\frac{1}{2}|CA||AB| \sin |\sphericalangle CAB|} = \frac{\frac{1}{2}k|CA|k|AB| \sin |\sphericalangle CAB|}{\frac{1}{2}|CA||AB| \sin |\sphericalangle CAB|} = k^2.$$



Označme významné body ako na obrázku. Vzhľadom na rovnobežnosť priamok, na ktorých ležia príslušné strany týchto trojuholníkov, t. j.  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{IJ} = \overleftrightarrow{JF}$ ,  $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DJ} = \overleftrightarrow{JG}$  a  $\overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{EJ} = \overleftrightarrow{JH}$ , sú všetky tri malé trojuholníky, t. j.  $\triangle DEJ$  s obsahom  $S_1$ ,  $\triangle JFG$  s obsahom  $S_2$  a  $\triangle IJH$  s obsahom  $S_3$ , podobné veľkému  $\triangle ABC$  s obsahom  $S$ . Ak príslušne označíme koeficienty týchto podobností  $k_1$ ,  $k_2$  a  $k_3$ , podľa úvodného tvrdenia pre  $i \in \{1, 2, 3\}$  dostávame  $\frac{S_i}{S} = k_i^2$ , z čoho  $\sqrt{S_i} = k_i \sqrt{S}$ . Z rovnobežníka  $ADJI$  a podobnosti  $\triangle IJH$  s  $\triangle ABC$  dostávame  $|AD| = |IJ| = k_3 |AB|$ , analogicky z rovnobežníka  $EBFJ$  a podobnosti  $\triangle JFG$  s  $\triangle ABC$  zase  $|EB| = |JF| = k_2 |AB|$  a napokon z podobnosti  $\triangle DEJ$  s  $\triangle ABC$  zase  $|DE| = k_1 |BA| = k_1 |AB|$ . Celkovo teda

$$|AB| = |AD| + |DE| + |EB| = k_3 |AB| + k_1 |AB| + k_2 |AB| = (k_1 + k_2 + k_3) |AB|,$$

takže  $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ . Dostávame teda

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = k_1 \sqrt{S} + k_2 \sqrt{S} + k_3 \sqrt{S} = (k_1 + k_2 + k_3) \sqrt{S} = \sqrt{S}.$$

### Komentár opravovateľa (Stano Krajčí):

Pri dokazovaní rovností sa vo všeobecnosti často vyskytuje chyba (a tak to bolo aj pri tejto úlohe), že riešiteľ vyštaruje z dokazovaného tvrdenia a úpravami sa dostane k tvrdeniu, ktoré neodškriepiteľne platí. Tento postup je však možný iba vtedy, keď všetky úpravy boli ekvivalentné, čo však treba zakaždým zdôvodňovať. Jednoduchšie je preto tento postup obrátiť: Začať zo zrejmejšieho alebo predpokladaného tvrdenia a úpravami, ktoré tak nemusia byť ekvivalentné, sa dostať k dokazovanému tvrdeniu.

Najkrajšie riešenia mala Adela Kupková.

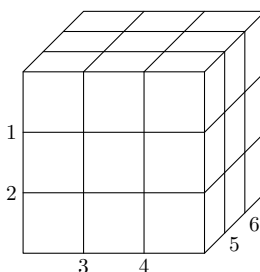
### 3 Zadanie:

Predstavte si drevenú kocku s hranou dlhou 3 dm. Minimálne koľko rezov pílkou musíme urobiť, aby sme drevenú kocku rozrezali na 27 malých kociek?

#### Riešenie:

Rez je vlastne rovina, a tá delí priestor na dva polpriestory. Ak ľubovoľné konvexné teleso umiestnime tak, aby malo spoločné vnútorné body s oboma týmito polpriestormi, rez ho rozdelí na dve konvexné časti. Uvedomme si pritom, že ten istý rez môže poslúžiť na rozdelenie viacerých telies.

Ľahko vidíme, že klasické „rubikovské“ rozdelenie šiestimi rezmi, z ktorých každý je rovnobežný s dvojicou protíahlych strán pôvodnej kocky a leží 1 dm od jednej z nich a 2 dm od druhej, rozdelí našu veľkú kocku na 27 malých kociek.



Treba však ešte ukázať, že menej rezov nestačí. Sústreďme sa na stredovú malú kocku (t. j. jedínú tú, ktorá nemá spoločný bod s povrchom veľkej kocky). Po vykonaní všetkých rezov musí byť úplne oddelená od všetkých ostatných susedných kociek, teda každou z jej šiestich stien musí viesť nejaký rez. Keďže týchto stien je 6 a zrejme žiadne dve z nich neležia v tej istej rovine, tieto rezy musia byť rôzne, musí ich teda byť tiež aspoň 6. To však znamená, že aj celkový počet rezov musí byť aspoň 6.

#### Komentár opravovateľa (Stano Krajčí):

Niektorí riešitelia si neuvedomili, že jedným rezom možno na dva kusy rozdeliť i viac telies. iní radšej rozoberali obe možnosti chápania pojmu rez.

Málokto si však uvedomil, že nestačí len nájsť príklad, že na rozdelenie stačí 6 rezov, ale treba dokázať, že tento počet rezov je naozaj nutný. Inak by totiž mohol existovať nimi nenájdenny spôsob delenia pomocou napr. 5 rezov, a potom by už minimálny počet rezov (a teda odpoveď na otázku zo zadania) určite nebol 6.

Jedno z riešiteľských zdôvodnení tohto faktu spočívalo v diskusii o polohe 5 rezov voči pôvodnej kocke. Úvaha, že musia byť rovnobežné s niektorou stenou pôvodnej kocky, je síce principiálne správna, netreba však zabudnúť na to, že už po prvom reze možno odrezané časti ľubovoľne presúvať.

Najkrajšie riešenia mali Mária Dvorská, Jana Fedorová, Adela Kupková a Martina Mockovčiaková, ktorá uvedené delenie trefne prirovnala k trojsmernému krájaniu cibule :-).

#### 4 Zadanie:

Dvaja kamaráti Adam a Boris skočili naraz do vody z protíľahlých strán neštandardne dlhého bazéna obdĺžnikového tvaru. Obidvaja plávali konštantnými, ale rôznymi rýchlosťami. Aký dlhý je bazén, ak sa prvýkrát stretli 30 m od Adamovho a druhýkrát 20 m od Borisovho štartovacieho miesta?

#### Riešenie:

Podľa Mareka Derňára:

Označme  $x$  dĺžku bazéna,  $v_A$  rýchlosť Adama,  $v_B$  rýchlosť Borisa,  $t_1$  čas ich prvého a  $t_2$  čas ich druhého stretnutia. Zo zadania sú číselné hodnoty týchto premenných kladné, navyše  $x \geq 30$  m a  $t_1 < t_2$ . Za čas  $t_1$  teda Adam prepláva 30 m a Boris  $x - 30$  m, čiže, vyjadrené rovnicami,  $v_A t_1 = 30$  m a  $v_B t_1 = x - 30$  m. Z tejto sústavy dvoch rovníc dostávame  $v_B = \frac{x-30}{30} v_A$ . Rozoberme tri možnosti:

- Ak  $x = 50$  m, tak dosadením do predchádzajúceho vzťahu dostávame  $v_B = \frac{2}{3} v_A$ , a teda  $v_B < v_A$ . Ale pri ich druhom stretnutí, ktoré musí byť na tom istom mieste, má Adam preplávaných  $50$  m +  $20$  m =  $70$  m a Boris  $50$  m +  $30$  m =  $80$  m, čo je spor, lebo Boris je pomalší ako Adam. Táto možnosť teda nevyhovuje.

b) Ak  $x > 50$  m, pri druhom stretnutí bude mať Boris preplávaných  $2x - 20$  m a Adam bude mať preplávaných buď  $x - 20$  m, alebo  $x + 20$  m (podľa toho, či sa pri 2. stretnutí už bude vracat', alebo ešte nie). Máme teda dve možnosti:

- V prvom prípade dostávame sústavu rovníc  $v_B t_2 = 2x - 20$  m a  $v_A t_2 = x - 20$  m, ktorej jediným kladným riešením je  $x = (55 + 5\sqrt{73})$  m. Táto možnosť naozaj vyhovuje, a to napríklad pre  $v_A = 1 \text{ ms}^{-1}$ ,  $v_B = \frac{5 + \sqrt{73}}{6} \text{ ms}^{-1}$ ,  $t_1 = 30$  s a  $t_2 = (35 + 5\sqrt{73})$  s.
- V druhom prípade dostávame sústavu rovníc  $v_B t_2 = 2x - 20$  m a  $v_A t_2 = x + 20$  m, ktorej jediným kladným riešením je  $x = 70$  m. Táto možnosť naozaj vyhovuje, a to napríklad pre  $v_A = 1 \text{ ms}^{-1}$ ,  $v_B = \frac{4}{3} \text{ ms}^{-1}$ ,  $t_1 = 30$  s a  $t_2 = 90$  s.

V tejto možnosti teda máme dve riešenia, a to  $(55 + 5\sqrt{73})$  m a 70 m.

c) Ak  $x < 50$  m, pri druhom stretnutí bude mať Adam preplávaných  $x + 20$  m a Boris bude mať preplávaných buď 20 m, alebo  $2x - 20$  m (podľa toho, či sa pri 2. stretnutí už bude vracat', alebo ešte nie). Máme teda dve možnosti:

- V prvom prípade dostávame sústavu rovníc  $v_A t_2 = x + 20$  m a  $v_B t_2 = 20$  m, ktorej jediným kladným riešením je  $x = 40$  m. Táto možnosť naozaj vyhovuje, a to napríklad pre  $v_A = 1 \text{ ms}^{-1}$ ,  $v_B = \frac{1}{3} \text{ ms}^{-1}$ ,  $t_1 = 30$  s a  $t_2 = 60$  s.
- V druhom prípade dostávame sústavu rovníc  $v_A t_2 = x + 20$  m a  $v_B t_2 = 2x - 20$  m, ktorej jediným kladným riešením je  $x = 70$  m, to však nevyhovuje predpokladu  $x < 50$  m.

V tejto možnosti teda máme jediné riešenie, a to 40 m.

Zhrnutím teda dostávame, že bazén môže mať šírku 40 m,  $(55 + 5\sqrt{73})$  m, alebo 70 m.

#### **Komentár opravovateľa (Inga Semanišinová):**

Mnohí počítali len prípad, že druhýkrát sa Adam s Borisom stretnú po tom, ako sa obaja otočia na protiľahlej strane bazénu. Zabudli na možnosť, že Adam alebo Boris ešte nemuseli v čase 2. stretnutia doraziť k druhej strane bazéna.

Najkrajšie riešenia mali všetci 5-bodoví riešitelia :-).

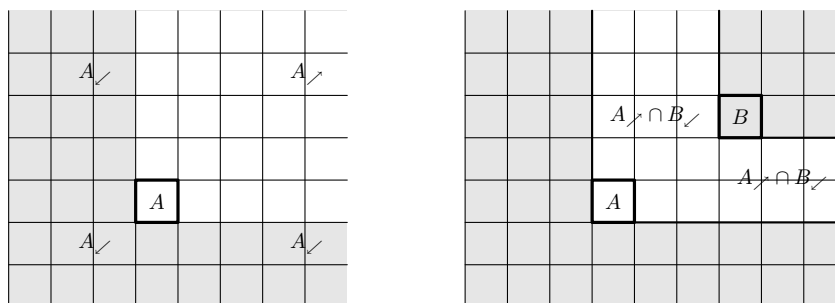
### **5 Zadanie:**

Na bielom štvorčekovanom papieri je  $n$  štvorčekov zafarbených načierno. Štvorčeky sa prefarbujú (naraz) podľa nasledujúceho pravidla: Každý štvorček získa takú farbu, akú mala väčšina z týchto troch štvorčekov: uvažovaný štvorček, štvorček bezprostredne napravo od neho a štvorček bezprostredne nad ním. Dokážte, že najviac po  $n$  prefarbeniach budú všetky štvorčeky biele.

#### **Riešenie:**

Majme teda nekonečnú štvorcovú sieť s bielymi a čiernymi štvorčekmi. Ak vezmeme štvorček  $A$ , tak si označíme  $A_{\nearrow}$  časť siete, kde sú práve všetky štvorčeky, ktoré sú súčasne v riadkoch nad ním (vrátane jeho riadku) a súčasne v stĺpcoch napravo od neho (vrátane jeho stĺpca). Zvyšnú časť si označíme ako  $A_{\swarrow}$ . Všimnime si dve dôležité pozorovania:

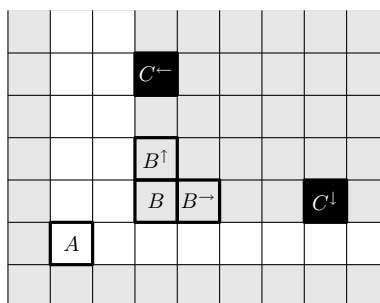
- (1) Ak pre nejaký štvorček  $A$  sú všetky štvorčeky v  $A_{\swarrow}$  biele, tak po prefarbení ostanú biele. Ak uvažujeme ľubovoľný z nich, všetky štvorčeky rozhodujúce o jeho farbe sú biele (lebo ležia v  $A_{\swarrow}$ ).



(2) Majme štvorčeky  $A$  a  $B$ , pričom  $B$  leží v  $A$ . Ak sú štvorčeky z  $A \cap B$  iba biele, ostajú biele i po farbení. Dôvody sú analogické ako v (1).

Tvrdenie úlohy vyplynie z tvrdenia „Ak je pri ľubovoľnom rozložení čiernych štvorčekov v časti  $A$  pre nejaký štvorček  $A$  nanajvýš  $n$  čiernych štvorčekov, po  $n$  farbeniach budú všetky štvorčeky v  $A$  biele.“, ktoré dokážeme matematickou indukciou:

- 1 Ak  $n = 0$ , tvrdenie je triviálne pravdivé.
- 2 Majme ľubovoľné rozloženie čiernych štvorčekov na štvorcovej sieti a vezmime ľubovoľný štvorček  $A$  taký, že v  $A$  je najviac  $n \geq 1$  čiernych štvorčekov. V  $A$  potom existuje čierny štvorček  $C^{\leftarrow}$ , ktorý je najviac vľavo, (ak ich je viac, vezmeme ľubovoľný z nich) a čierny štvorček  $C^{\downarrow}$ , ktorý je najviac dole, (ak ich je viac, aj tu vezmeme ľubovoľný z nich), pričom nie sú nutne rôzne. Pomocou nich určíme ďalší štvorček  $B$ , a to tak, že je v tom istom stĺpci ako  $C^{\leftarrow}$  a v tom istom riadku ako  $C^{\downarrow}$ . Označme  $B^{\uparrow}$  štvorček nad  $B$  a  $B^{\rightarrow}$  štvorček vľavo od  $B$ .



V  $(B^{\uparrow})$  je maximálne  $n - 1$  čiernych štvorčekov vzhľadom na počet čiernych štvorčekov v  $A$  a na fakt, že v najspodnejšom riadku  $B$  je aspoň jeden, a to  $C^{\downarrow}$ . Preto na základe indukčného predpokladu bude  $(B^{\uparrow})$  po  $n - 1$  farbeniach určite biela. Podobne pre  $(B^{\rightarrow})$ . V  $(B^{\rightarrow})$  je maximálne  $n - 1$  čiernych štvorčekov vzhľadom na počet čiernych štvorčekov v  $A$  a na fakt, že v najľavejšom stĺpci  $B$  je aspoň jeden, a to  $C^{\leftarrow}$ . Preto na základe indukčného predpokladu bude  $(B^{\rightarrow})$  po  $n - 1$  farbeniach určite biela. Keď si to zosumarizujeme, všetky štvorčeky  $B$  okrem  $B$  budú určite biele po  $n - 1$  farbeniach. Avšak ak by bol  $B$  čierny i po týchto krokoch, zafarbí sa na bielo v  $n$ . farbení, keďže štvorčeky  $B^{\uparrow}$  a  $B^{\rightarrow}$  sú určite biele po  $n - 1$  farbeniach. A navyše v tomto farbení žiaden iný štvorček  $B$  nenadobudne čiernu farbu, lebo každý zo štvorčekov rozhodujúcich o jeho farbe je biely. Nakoniec vzhľadom na fakt (2) sú i štvorčeky  $A \cap B$  biele. Tým sme dokázali naše tvrdenie pre číslo  $n$ .

Majme teraz nekonečnú sieť, na ktorej je najviac  $n$  čiernych štvorčekov. Potom existuje štvorček  $A$  taký, že všetky čierne štvorčeky ležia v  $A$  (vyplýva to z konečnosti počtu čiernych štvorčekov a definície  $A$ ). Na základe tvrdenia dokázaného matematickou indukciou bude  $A$  po  $n$  farbeniach biela a na základe tvrdenia (1) bude i  $A$  biela. Tým je tvrdenie dokázané.

**Komentár opravovateľa (Jaro Šupina):**

Žiadne z odovzdaných riešení nezískalo plný počet bodov. Vo viacerých však bola načrtnutá pekná všeobecná myšlienka, ale chýbala dôsledná argumentácia a prípadna premena tejto myšlienky do dôkazu. Navyše v mnohých riešeniach bola snaha zhrnúť dôkaz tvrdenia vyriešením niekoľkých konkrétnych prípadov.

Najkvalitnejšie bolo riešenie Mareka Derňára.

**6 Zadanie:**

Ak chcete zistiť, ktorý deň v týždni ste sa narodili, použite nasledujúci postup: Označte deň vášho narodenia  $D$ , mesiac  $M$  a rok  $Y$  (napr. ak ste sa narodili 6. júla 1989, tak  $D = 6$ ,  $M = 7$  a  $Y = 1989$ ). Ak  $M = 1$  alebo  $M = 2$ , tak odpočítajte 1 od  $Y$  a pripočítajte 12 k  $M$ . Vytvorte číslo  $Y_1$  z prvých dvoch číslic čísla  $Y$  a číslo  $Y_2$  z druhých dvoch číslic čísla  $Y$ . Vypočítajte:

$$X = \left( D + Y_2 - 2Y_1 + \lfloor 2,6M - 5,39 \rfloor + \left\lfloor \frac{Y_2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y_1}{4} \right\rfloor \right) \bmod 7.$$

Ak vám vyšlo  $X = 0$ , tak ste sa narodili v nedeľu, ak  $X = 1$ , tak v pondelok a tak ďalej. Dokážte, že uvedený postup je správny.

**Riešenie:**

Podľa Mareka Derňára (a čiastočne podľa Ľubomíra Antoniho):

Najprv dokážeme, že pri prechode z daného dňa k predchádzajúcemu sa hodnota  $X$  zmení o  $-1_7$ : Rozlíšime možnosti:

- Ak uvažujeme deň okrem prvého dňa v mesiaci, tak posun o deň dozadu má vplyv iba na zmenu údajov  $D$  vo vzorci, a to zmenšenie o 1, takže aj  $X$  sa zmení o  $-1_7$  (čo sa prejaví i presunom do požadovanej zvyškovej triedy).
- Ak uvažujeme prvý deň v mesiaci s výnimkou marca, tak posun o deň dozadu sa prejaví iba na údajoch  $D$  a  $N = \lfloor 2,6M - 5,39 \rfloor$ , takže celková zmena hodnoty  $X$  je  $((D' + N') - (D + N))_7$  (čiarkované verzie sú hodnoty po zmene). Možnosti sú rozobraté v tabuľke:

$M$	$D$	$N$	$M'$	$D'$	$N'$	$(D' + N') - (D + N)$
4	1	5	3	31	2	27
5	1	7	4	30	5	27
6	1	10	5	31	7	27
7	1	12	6	30	10	27
8	1	15	7	31	12	27
9	1	18	8	31	15	27
10	1	20	9	30	18	27
11	1	23	10	31	20	27
12	1	25	11	30	23	27
13	1	28	12	31	25	27
14	1	31	13	31	28	27

Vo všetkých prípadoch teda  $(D' + N') - (D + N) = 27$ , čo znamená, že požadovaná zmena hodnoty  $X$  je  $27_7 = -1_7$ .

- Ostáva ukázať tvrdenie pre prvý marcový deň, čo môže znamenať nielen prechod roka, ale i storočia, a navyše musíme rozlišovať priestupné a nepriestupné roky:
  - Uvažujme nepriestupný rok. Potom  $D$  sa zvýši o 27 a výraz  $[2, 6M - 5, 39]$  sa zvýši o 29. Znova môžu nastať dva prípady:
    - Ak  $4 \nmid Y$ , tak  $Y$  sa zníži o 1, a preto sa  $Y_2$  zníži o 1, pričom sa nezmení výraz  $\lfloor \frac{Y_2}{4} \rfloor$  a  $Y_1$ . Toto všetko dokopy dáva zmenu  $X$  o  $(27 - 1 + 29)_7 = 55_7 = -1_7$ .
    - Prípád  $4 \mid Y$  (výnimka) nastáva práve vtedy, keď zároveň platí  $4 \mid Y$ ,  $100 \mid Y$  a  $400 \nmid Y$ . Potom ide o prechod storočia, a preto sa  $Y_2$  zvýši o 99,  $Y_1$  zníži o 1, a teda  $(-2Y_1)$  zvýši o 2,  $\lfloor \frac{Y_2}{4} \rfloor$  zvýši o 24 (pôvodne  $Y_2 = 0$ ) a  $\lfloor \frac{Y_1}{4} \rfloor$  nezmení, pretože  $400 \nmid Y$  implikuje  $4 \nmid Y_1$ . Celý výraz  $X$  sa potom zmení o  $(27 + 99 + 2 + 29 + 24)_7 = 181_7 = -1_7$ .
  - Uvažujme priestupný rok. Potom  $D$  sa zvýši o 28, výraz  $[2, 6M - 5, 39]$  sa zvýši o 29 a  $4 \mid Y$ . Nastávajú dva prípady:
    - Prechod v rámci storočí. Keďže  $Y$  sa zníži o 1,  $Y_2$  taktiež, ale vzhľadom na to, že  $4 \mid Y$ , tak i  $4 \mid Y_2$ , a preto  $\lfloor \frac{Y_2}{4} \rfloor$  sa zníži o 1. Celkovo sa  $X$  zmení o  $(28 - 1 + 29 - 1)_7 = 55_7 = -1_7$ .
    - Prechod medzi storočiami, čo je vzhľadom na výnimku pri nepriestupných rokoch v prípade  $400 \mid Y$ . V takom prípade sa  $Y_1$  znižuje o 1, čím sa  $(-2Y_1)$  zvyšuje o 2,  $\lfloor \frac{Y_1}{4} \rfloor$  sa znižuje o 1 (lebo  $400 \mid Y$  implikuje  $4 \mid Y_1$ ) a  $Y_2$  sa zvyšuje o 99, čím sa  $\lfloor \frac{Y_2}{4} \rfloor$  zvyšuje o 24.  $X$  sa potom zmení o  $(28 + 99 + 2 + 29 - 1 + 24)_7 = 181_7 = -1_7$ .

Keďže pri prechode k včerajšku sa hodnota  $X$  mení o  $-1_7$ , pri prechode k zajtrajšku sa táto hodnota mení o  $1_7$  (inak by pred chvíľou uvedené tvrdenie naplatilo pre zajtrajšok, voči ktorému je dnešok včerajškom).

Vzhľadom na modul 7 vidieť, že hodnota  $X$  sa cyklicky mení tak, že vo všetky pondelky je rovnaká, vo všetky utorky je rovnaká a voči pondelkom zmenená o  $1_7$  a tak ďalej. Ak teda hodnota  $X$  vyhovuje zadaniu v nejaký deň, vyhovuje už každý deň. Stačí teda overiť, že uvedený vzorec platí napríklad pre dátum 20. 10. 2008. Vtedy  $D = 20$ ,  $M = 10$ ,  $Y = 2008$ ,  $Y_1 = 20$  a  $Y_2 = 8$ . Potom

$$X = \left( 20 + 8 - 2 \cdot 20 + [2, 6 \cdot 10 - 5, 39] + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor \right)_7 = (8 + 2 + 5)_7 = 1_7,$$

čo je pravda, pretože v ten deň bol naozaj pondelok.

### Komentár opravovateľa (Jaro Šupina):

Úlohu v podstate riešili dvaja riešitelia. Obe riešenia boli vzhľadom na trochu väčšiu zložitosť úlohy na celkom dobrej úrovni. V jednom z nich som však musel strhnúť bod, pretože riešiteľ zabudol na prechody medzi storočiami.

---