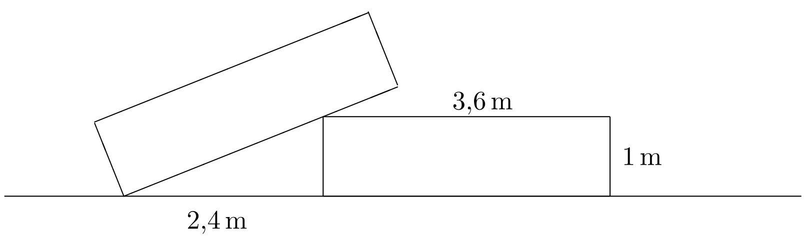
KRVOPOT

4. séria, 2007/2008

Riešenia a komentáre

1 Zadanie (výber Janka Hajduková):

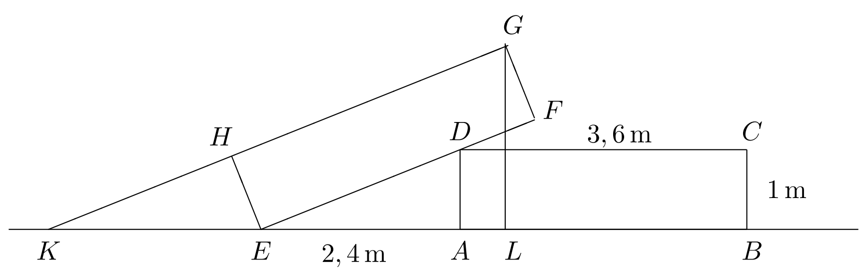
Na veľkom stavenisku bola z dvoch rovnako veľkých kvádrov opretých o seba vytvorená takáto „stavba“:



Jurko sa vyštveral na jej najvyššie miesto a skočil dolu. Z akej výšky zoskočil, ak vieme, že rozmery oboch kvádrov sú $1\,\mathrm{m} \times 3{,}6\,\mathrm{m}$ a vzdialenosť dolného rohu šikmo položeného kvádra od najbližšieho rohu rovno položeného kvádra je $2{,}4\,\mathrm{m}$?

Riešenie:

Pri pohľade na stavbu z kvádrov spredu vidíme dva obdĺžniky, označme ich $ABCD$ a $EFGH$. Ďalej označme písmenom K priesečník polpriamky GH s priamkou AB a písmenom L pätu kolmice vedenej z bodu G na priamku AB (viď obrázok):



$ABCD$ a $EFGH$ sú rovnaké obdĺžniky, a preto $|EH| = |AD| = 1\,\mathrm{m}$ a obidva uhly $\angle EHK$ a $\angle DAE$ sú pravé. Keďže $EFGH$ je obdĺžnik, $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$, t. j. uhly $\angle EKH$ a $\angle DEA$ sú súhlasné, a teda majú rovnakú veľkosť. Podľa vety *usu* o zhodnosti trojuholníkov sú trojuholníky EHK a DAE zhodné, z čoho $|HK| = |AE| = 2,4\,\mathrm{m}$ a $|EK| = |ED| = \sqrt{|EA|^2 + |AD|^2} = \sqrt{2,4^2\,\mathrm{m}^2 + 1^2\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{5,76\,\mathrm{m}^2 + 1\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{6,76\,\mathrm{m}^2} = 2,6\,\mathrm{m}.$

Uvažujme teraz trojuholníky EAD a KLG. Obidva sú pravouhlé (pravé uhly sú pri vrcholoch A a L), a navyše, ako sme ukázali vyššie, uhly $\angle GKL$ a $\angle DEA$ sú súhlasné, t. j. rovnako veľké. Podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov sú trojuholníky EAD a KLG podobné, z čoho

$\frac{|LG|}{|AD|} = \frac{|KG|}{|ED|}$, a teda $|LG| = \frac{|KG|}{|ED|} \cdot |AD| = \frac{(|KH|+|HG|)}{|ED|} \cdot |AD| = \frac{(2{,}4\,\mathrm{m}+3{,}6\,\mathrm{m})}{2{,}6\,\mathrm{m}} \cdot 1\,\mathrm{m} = \frac{30}{13}\,\mathrm{m} \doteq 2,308\,\mathrm{m}.$

Najvyšším bodom stavby je bod G a jeho vzdialenosť od zeme je $|LG|$. Jurko teda zoskočil z výšky $\frac{30}{13}\,\mathrm{m}$, čo je približne $230,8\,\mathrm{cm}$.

Komentár (oprava Janka Hajduková):

Väčšina riešiteľov využívala pravouhlé trojuholníky na výpočet veľkostí uhlov $\angle DEA$, $\angle EKH$, $\angle CDF$, $\angle LGF$, atď. Tým však dochádzalo k zaokrúhľovaniu, a preto bol výsledok nepresný (sankcia 1 bod). Niektorí si uvedomili, že v obrázku sú mnohé dvojice uhlov rovnaké, chýbalo však zdôvodnenie prečo (sankcia 1 bod).

Mnohí počítali veľkosť úsečky GL tak, že si ju rozdelili na niekoľko menších úsečiek, ktorých veľkosť rátali zo vzniknutých menších pravouhlých trojuholníkov. V podstate len dvoch študentov napadlo priamo využiť zhodnosť a podobnosť trojuholníkov.

---

2 Zadanie (výber Inga Semanišinová):

Myslite si nejaké trojciferné číslo, ktorého hodnota prvej číslice sa od hodnoty tretej líši aspoň o 2. Napíšte ho v obrátenom poradí. Z takto vzniknutých čísel odpočítajte menšie od väčšieho. Výsledok napíšte v obrátenom poradí a obidve čísla sčítajte. Aké číslo ste dostali? Vyslovte hypotézu a dokážte ju.

Riešenie:

Po vyskúšaní uvedeného postupu na niekoľkých číslach môžeme vysloviť hypotézu, že výsledkom je vždy číslo 1089. Dokážme ju:

Majme trojciferné číslo. Zapíšeme ho v tvare $(xyz)_{10}$, kde x, y, z sú cifry, $x, y, z \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $x \neq 0$. (Číslo z teoreticky môže byť rovné 0, keďže v zadaní nie je povedané, že aj obrátené číslo musí byť trojciferné.) Vieme, že platí $|x-z| \geq 2$. Keďže x a z sú cifry, maximálny rozdiel väčšej a menšej z nich môže byť 9, t. j. $9 \geq |x - z| \geq 2$. Máme teda číslo $(xyz)_{10} = 100x + 10y + z$ a k nemu obrátené číslo $(zyx)_{10} = 100z + 10y + x$. Keď odčítame od väčšieho menšie, dostávame $|(xyz)_{10} - (zyx)_{10}| = |(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x)| = |99x - 99z| = 99|x - z|$. Ale vieme, že $9 \geq |x - z| \geq 2$, teda máme tieto možnosti: $|(xyz)_{10} - (zyx)_{10}| \in \{99 \cdot 2, 99 \cdot 3, \ldots, 99 \cdot 9\} = \{198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891\}$ Ak si toto číslo označíme $(abc)_{10} = 100a+10b+c$, tak k nemu obrátené číslo má tvar $(cba)_{10} = 100c+10b+a$. Po sčítaní dostávame $(abc)_{10}+(cba)_{10} = (100a+10b+c)+(100c+10b+a) = (a+c)\cdot 100+2\cdot 10\cdot b+(a+c)$. Z možností, ktoré sme si vypísali vyššie, vidíme, že prostredná cifra b je vždy 9 a tiež súčet prvej a tretej cifry je vždy 9. Potom dostávame, že súčtom takýchto dvoch čísel je vždy číslo $9 \cdot 100 + 2 \cdot 10 \cdot 9 + 9 = 900 + 180 + 9 = 1089$. Hypotéza je dokázaná.

Komentár (oprava Ľubka Havírová):

(Netrestanou) chybičkou niektorých riešiteľov bolo, že zabudli vylúčiť možnosť $x = 0$ – vtedy totiž číslo $(xyz)_{10}$ nebude trojciferné.

Body sa však sťahovali za nedostatočný komentár – svoje riešenie treba vždy patrične zdôvodniť.

---

3 Zadanie (výber Majka Kolková):

Majme danú kocku s hranou dĺžky 1 meter. Nech T je množina bodov, ktoré sú bližšie k jej stredu než k ľubovoľnému jej vrcholu. Vypočítajte objem telesa T.

Riešenie:

Vložme kocku do súradnicovej sústavy s jednotkou 1 meter tak, že jej stred bude $S = [0,0,0]$ a jej vrcholy $V_1 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, $V_2 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, $V_3 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, $V_4 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, $V_5 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $V_6 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $V_7 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $V_8 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. To to, že bod priestoru je bližšie k vrcholu V_1 ako ku stredu, vyjadríme nerovnosťou $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z+\frac{1}{2})^2} > \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, takže po úprave: $-x+y+z+\frac{3}{4} > 0$. Analogicky to urobíme s ostatnými vrcholmi, čím dostaneme týchto 8 súčasne platiacich podmienok: $-x+y+z+\frac{3}{4} > 0$, $-x-y+z+\frac{3}{4} > 0$, $x-y+z+\frac{3}{4} > 0$, $x+y+z+\frac{3}{4} > 0$, $-x+y-z+\frac{3}{4} > 0$, $-x-y-z+\frac{3}{4} > 0$, $x-y-z+\frac{3}{4} > 0$, $x+y-z+\frac{3}{4} > 0$.

Geometrickou interpretáciou každej z podmienok je polpriestor. Keďže platia súčasne, teleso T je prienikom týchto polpriestorov.

Priesečníkmi hraničných rovín polpriestorov sú body: $[\frac{3}{4}, 0, 0]$, $[-\frac{3}{4}, 0, 0]$, $[0, \frac{3}{4}, 0]$, $[0, -\frac{3}{4}, 0]$, $[0, 0, \frac{3}{4}]$, $[0, 0, -\frac{3}{4}]$, ktoré sú vrcholmi pravidelného osemstena. Každá z jeho stien je rovnostranný trojuholník s dĺžkou hrany $\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}$.

Hraničné roviny obsahujú body, ktoré sú rovnako vzdialené od stredu kocky ako od najbližšieho vrchola, teda body, ktoré nepatria telesu T. Objem osemstena je však ten istý, aj keď neuvažujeme body na jeho povrchu. Preto objem telesa T je zhodný s objemom spomínaného osemstena, a ten je rovný $\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4})^3$, teda $\frac{9}{16}$ (v jednotkách m^3).

Komentár (oprava Majka Kolková):

Dvaja z piatich riešiteľov brali do úvahy len body kocky. V tomto prípade je šikovnejšie riešenie bez zavedenia súradnicovej sústavy – riešenie je veľmi elegantné a taký je aj výsledok: $\frac{1}{2}$. Tu dopracovanie sa k výsledku nevyžaduje poznať tvar telesa, no tento tvar je v každom prípade zaujímavý a pomerne jednoducho odhaliteľný.

Dvaja riešitelia intuitívne rozdelili body kocky do ôsmich malých, rovnakých kociek – podľa toho, ku ktorému vrcholu pôvodnej kocky boli najbližšie. Jeden z nich aj dokázal, že toto rozdelenie je správne.

V jednom prípade chýbalo vylúčenie bodov povrchu osemstena. Iný riešiteľ však práve túto časť zvládol veľmi sympaticky. Keďže riešil pozmenené zadanie, objemom telesa bez povrchu a s povrchom priradil hodnoty $0,4\overline{9}$ a $\frac{1}{2}$:-) (ale správne ich chápal ako rovnaké číslo).

---

4 Zadanie (výber Inga Semanišinová):

Matematickej súťaže sa zúčastnilo 142 žiakov. Po skončení súťaže autor štvrtej úlohy zistil, že priemerný počet bodov za ňu udelených pripadajúci na jedného súťažiaceho je po zaokrúhlení na desatiny $2{,}7$. Nie každý súťažiaci však štvrtú úlohu odovzdal, takže priemerný počet bodov udelených za štvrtú úlohu pripadajúci na jedno odovzdané riešenie bol po zaokrúhlení na desatiny $3{,}9$. Koľko súťažiacich mohlo odovzdať štvrtú úlohu? (Udeľovali sa len celé body, neodovzdaná úloha bola hodnotená 0 bodmi.)

Riešenie:

Kedže priemerný počet bodov je zaokrúhlený na desatiny, výsledné číslo mohlo byť z intervalu $[2,65; 2,75)$. Platí teda $2,65 \leq \frac{s}{142} < 2,75$, kde s je celkový počet získaných bodov. Po úprave dostaneme: $376,3 \leq s < 390,5$. Celkový počet získaných bodov teda mohol byť 377, 378, 379, ..., 390. Druhý uvedený priemer je číslo z intervalu $[3,85; 3,95)$. Najväčší možný počet získame ako dolnú celú časť podielu maxima bodov a minimálneho priemeru: $390 : 3,85 \doteq 101,29$.

Najmenší možný počet získame ako hornú celú časť podielu minima bodov a maximálneho priemeru: $377 : 3,95 \doteq 95,44$. Odtiaľ dostávame, že tretiu úlohu mohlo odovzdať najmenej 96 a najviac 101 súťažiacich.

Ešte je potrebné ukázať, že pre každý z týchto počtov súťažiacich existuje zodpovedajúci celkový súčet získaných bodov, pričom priemer bude z intervalu $[3,85; 3,95)$:

Počet	Body	Komentár	Priemer
96	napr. $89 \cdot 4 + 7 \cdot 3$	89 súťažiacich malo 4 body za úlohu a 7 malo 3 body	$\doteq 3,9$
97	napr. $90 \cdot 4 + 7 \cdot 3$	90 súťažiacich malo 4 body za úlohu a 7 malo 3 body	$\doteq 3,9$
98	napr. $84 \cdot 4 + 14 \cdot 3$	84 súťažiacich malo 4 body za úlohu a 14 malo 3 body	$\doteq 3,9$
99	napr. $85 \cdot 4 + 14 \cdot 3$	85 súťažiacich malo 4 body za úlohu a 14 malo 3 body	$\doteq 3,9$
100	napr. $86 \cdot 4 + 14 \cdot 3$	86 súťažiacich malo 4 body za úlohu a 14 malo 3 body	$\doteq 3,9$
101	napr. $87 \cdot 4 + 14 \cdot 3$	87 súťažiacich malo 4 body za úlohu a 14 malo 3 body	$\doteq 3,9$

Komentár (oprava Inga Semanišinová):

Najkrajšie riešenie mal Marek Derňár.

Niektorí si neuvedomili, že $2,74\overline{9} = 2,75$, podobne $3,94\overline{9} = 3,95$. Mnohí zabudli urobiť skúšku správnosti, teda overiť, že pre daný počet súťažiacich vieme nájsť zodpovedajúci počet bodov.

---

5 Zadanie (výber Janka Mihalčová-Pócsová):

Adam a Boris hrajú na doske zloženej zo šiestich polí očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 a 6 nasledujúcu hru: Na začiatku je umiestnená na pole s číslom 2 figúrka a potom sa hádže bežnou hracou kockou. Ak padne číslo deliteľné tromi, posunie sa figúrka na pole s číslom o jedna menším, inak na pole s číslom o jedna väčším. Hráči sa po každom ťahu striedajú. Hra končí víťazstvom Adama, ak sa figúrka dostane na pole s číslom 1, a Boris vyhrá, ak figúrka dôjde na políčko 6. S akou pravdepodobnosťou zvíťazí Adam?

Riešenie:

S pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$ sa figúrka posunie na pole s číslom o jedna menším a s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$ na pole s číslom o jedna väčším.

Označme p_n pravdepodobnosť, že sa dostanem z n. políčka na políčko s číslom 1 (vtedy vyhráva Adam). Zaujíma nás, čomu sa rovná p_2. Zrejme $p_1 = 1$ a $p_6 = 0$ (pretože ak sa dostaneme na políčko s číslom 6, vyhral Boris). Ďalej platí:

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \tfrac{1}{3}p_1 + \tfrac{2}{3}p_3 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}p_3\\
p_3 &= \tfrac{1}{3}p_2 + \tfrac{2}{3}p_4\\
p_4 &= \tfrac{1}{3}p_3 + \tfrac{2}{3}p_5\\
p_5 &= \tfrac{1}{3}p_4 + \tfrac{2}{3}p_6 = \tfrac{1}{3}p_4
\end{aligned}
$$

Máme teda štyri lineárne rovnice o štyroch neznámych. Po jej vyriešení dostaneme riešenie $p_2 = \frac{15}{31}$.

Adam teda zvíťazí s pravdepodobnosťou $\frac{15}{31}$.

Komentár (oprava Janka Mihalčová-Pócsová):

Takmer všetci správne prehlásili, že Adam môže vyhrať len po $1.$, $3.$, $5.$ alebo inom nepárnom hode. Teda pravdepodobnosť, že vyhrá po prvom hode je $\frac{1}{3}$, pravdepodobnosť, že vyhrá po treťom hode $\frac{2}{3^3}$, (to je zatiaľ v poriadku), ale pri piatom hode sa situácia zmení, pretože z dvojky do jednotky sa môžeme dostať dvojakým spôsobom ($2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$ alebo $2 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$) a každý z nich má rovnakú pravdepodobnosť, a to $\frac{2^2}{3^5}$. A to niektorí riešitelia neuvážili.

Ďalším častým problémom bolo, že riešitelia dostali (správny) rad, ktorého súčet nevedeli vypočítať ($\frac{1}{3} + \frac{2}{3^3} + 2.\frac{2^2}{3^5} + \cdots =$?).

Tieto chyby sa prejavili na bodovom hodnotení.

---

6 Zadanie (výber Stano Krajči):

Majme obdĺžnik rozmeru 1×2008, rozdelený na 2008 malých štvorčekov. V každom políčku je napísané prirodzené číslo. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať niekoľko (jedno alebo viac) po sebe idúcich políčok tak, aby ich súčet čísel v nich bol deliteľný číslom 2008.

Riešenie:

Očíslujme políčka prirodzeným spôsobom od 1 do 2008 a označme a_i číslo v políčku i. Vezmime si všetky čiastočné súčty $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$ pre všetky $j \in \{0, 1, \ldots, 2008\}$ (špeciálne $s_0 = 0$). Máme teda 2009 celých (dokonca prirodzených) čísel, ale len 2008 rôznych zvyškov po delení 2008. To znamená, že aspoň dve z čísel tvaru s_j majú po takomto delení rovnaký zvyšok r. Ak označíme ich indexy p a q, pričom $p < q$, tak platí $s_p \equiv r \mod 2008$ a $s_q \equiv r \mod 2008$. Z toho vyplýva, že $s_q - s_p \equiv 0 \mod 2008$, teda číslo $s_q - s_p = \sum_{i=p+1}^{q} a_i$ je deliteľné 2008.

Našli sme teda niekoľko (v prípade $q = p + 1$ jedno, inak viac) po sebe idúcich políčok tak, aby ich súčet čísel v nich bol deliteľný číslom 2008, úloha je teda splnená.

Komentár (oprava Stano Krajči):

Úlohu riešili len dvaja riešitelia. Jedna z nich sa nesprávne domnievala, že v políčkach musia byť čísla od 1 do 2008, alebo aspoň že čísla môžeme vpisovať my.
