# KRVOPOT

## 3. séria, 2007/2008

## Riešenia a komentáre

**1 Zadanie (výber Janka Hajduková):**

Ferko má dom s pôdorysom štvorca s dĺžkou $10$ metrov umiestnený uprostred velikánskeho dvora. Ferko má kozu, ktorá sa pasie na dvore. Aby mu koza nikam neutiekla, priviazal ju povrazom dlhým $5$ metrov k rohu domu. Zdalo sa mu však, že kozička je veľmi obmedzovaná, tak kúpil nový povraz dlhý $13$ metrov a týmto ju priviazal k rohu domu. Koľkonásobne zväčšil plochu, ktorú môže koza spásať?

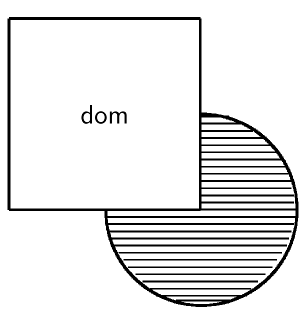
**Riešenie:**

Keď je koza priviazaná kratším, $5$-metrovým špagátom, tak môže spásať plochu tri štvrtiny kruhu vymedzeného trojštvrťkružnicou, ktorú opíše povraz priviazaný o roh domu (viď obr. 1). Táto plocha má obsah

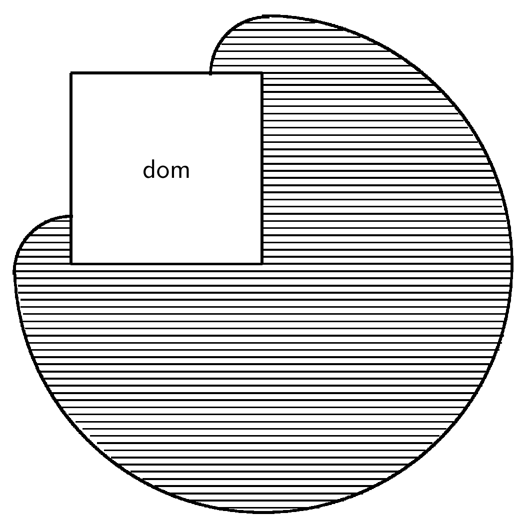
$$S_1 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 \text{ m}^2 = \frac{75}{4}\pi \text{ m}^2.$$

Keď je koza priviazaná dlhším, $13$-metrovým špagátom, tak môže spásať nielen plochu tri štvrtiny kruhu vymedzeného trojštvrťkružnicou, ktorú opíše povraz priviazaný o roh domu, ale, keďže je povraz dlhší ako strana domu, môže koza zájsť za niektorý zo susedných rohov domu, kde môže spásať ešte ďalšie dva štvrťkruhy s polomerom $13\text{m} - 10\text{m} = 3\text{m}$ (viď obr. 2). Nová plocha má obsah:

$$S_2 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 13^2 \text{ m}^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 3^2 \text{ m}^2 = \frac{507}{4}\pi \text{ m}^2 + \frac{18}{4}\pi \text{ m}^2 = \frac{525}{4}\pi \text{ m}^2.$$




obr. 1




obr. 2

Pomer obsahov týchto plôch je:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{525}{4}\pi \text{ m}^2}{\frac{75}{4}\pi \text{ m}^2} = \frac{525}{75} = 7.$$

Zakúpením dlhšieho povrazu teda Ferko zväčšil plochu 7-násobne.

**Komentár (oprava Janka Hajduková):**

Väčšina študentov vyriešila úlohu správne, avšak mnohí z vás, zdá sa, neradi pracujú so zlomkami a symbolmi. Musíme zdôrazniť, že $\pi \neq 3,14$ a že zaokrúhľovaním strácame presnosť, na ktorej v matematike dosť záleží. Táto nepresnosť vás stála 1 bod!

---

## 2 Zadanie (výber Ľubka Havírová):

Ivanka čítala denník svojho starého otca a našla v ňom nasledujúci zápis: „Dnes je 14. 2. 19■. Môj veľký den – mám NARODENINY! A nie je to len taký hocijaký narodeninový deň. Je výnimočný tým, že keď sčítam cifry tohto roku, dostanem svoj vek. Ale to ešte nie je všetko: Keď odčítam tento rok od jeho zrkadlového obrazu, dostanem štvornásobok svojho roku narodenia.“. Bohužiaľ, presný rok sa nedal poriadne prečítať, pretože bol rozmazaný. Pomôžte Ivanke zistiť, z ktorého roku je zápis v denníku z oslavy narodenín a koľko rokov mal vtedy jej starý otec.

**Riešenie:**

Najprv si uvedomme, že mesiac a deň narodenín nie sú vzhľadom na zadanie podstatné. Podstatný je iba rok, ktorý môžeme zapísať v desiatkovej sústave v tvare $19AB$, kde $A, B \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Podľa zadania potom pre vek $v$ starého otca platí $v = 1+9+A+B = 10+A+B$. Rok narodenia $n$ získame jednoduchým odčítaním roku $19AB$ od veku (v deň narodenia je táto úvaha plne namieste), teda $n = (19AB)_{10} - v = (1000+900+10A+B) - (10+A+B) = 1890 + 9A$. Zrkadlový odraz roku $19AB$ je $BA91$, podľa zadania je preto $(BA91)_{10} - (19AB)_{10} = 4n = 4(1890+9A)$, t. j. $(1000B+100A+90+1) - (1000+900+10A+B) = 7560+36A$, z čoho po ekvivalentnej úprave dostávame $6A + 111B = 1041$. Keby bolo $B \leq 8$, tak $111B \leq 888$, a teda $6a \geq 1041 - 888 = 153$, z čoho by sme dostali sporné $A > 9$. Takže musí byť $B = 9$, a zo vzťahu $6A + 111 \cdot 9 = 1041$ potom dostávame $A = 7$. Zápis je teda z roku $1979$, vek starého otca bol vtedy $v = 1 + 9 + 7 + 9 = 26$ rokov, takže sa narodil v roku $1953$. A naozaj, $9791 - 1979 = 4 \cdot 1953$, podmienka zo zadania je teda splnená.

**Komentár (oprava Ľubka Havírová):**

- Riešiteľ „nejak testoval“, až sa dopracoval k riešeniu $A = 7$ (pre $19AB$), ale ďalej nepreveril možnosti pre $A = 8$ a $A = 9$.
- „... po krátkom zamyslení prídeme na to, že najvhodnejšie roky budú končiace sa na čo najväčšie číslo, teda končiace číslom $9$.“. Prečo sa nemôžu končiť napríklad aj na $8$? Chýba zdôvodnenie.
- „$BA91 - 19AB$ je 4-násobok dátumu narodenia, teda po odčítaní posledné dvojčíslie musí byť: [alebo] $12$, a teda $91 - 12 = 79$, čiže rok je $1979$, $A = 7$, $B = 9$; [alebo] $16$, ..., [alebo] $88$.“. Prečo nemôže byť aj $04$, $08$, $92$, ...? Riešiteľ testoval podmienku jednotlivých rokov len pre $A = 7$ a $B = 9$ a iné možnosti neoveril.

---

## 3 Zadanie (výber Majka Kolková):

V stavebnici je $64$ rovnako veľkých kociek. Steny týchto kociek sú jednofarebné – čierne alebo biele. Zo všetkých kociek sa dá postaviť jedna veľká kocka, ktorej každá stena je spolovice biela a spolovice čierna. Aký najväčší počet celkom bielych kociek môže byť v stavebnici? Načrtnite, ako by taká veľká kocka mohla vyzerať spredu, zozadu, zhora, zdola, zľava a sprava.

**Riešenie:**

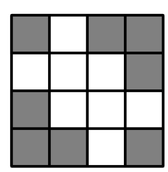
Veľká kocka bude mať rozmery $4 \times 4 \times 4$. Obsah jednej jej steny je $16$ štvorčekov, z toho $8$ čiernych a $8$ bielych. na celej veľkej kocke je teda čiernych $6 \times 8 = 48$ štvorčekov.

Je zrejmé, že pre splnenie tejto podmienky nezáleží na farbe tých stien elementárnych kociek, ktoré sa nepodieľajú na povrchu veľkej kocky. Keďže chceme maximalizovať počet úplne bielych štvorčekov, budeme predpokladať, že všetky takéto skryté steny sú biele, teda čierna farba je len na povrchu veľkej kocky.

Podľa toho, koľkými stenami prispieva malá kocka do povrchu veľkej kocky, môžeme $64$ kociek rozdeliť do týchto štyroch kategórií:

- $8$ rohových prispieva najviac $3$ čiernymi štvorčekmi,
- $24$ kociek na hranách veľkej kocky prispieva najviac $2$ čiernymi štvorčekmi,
- $24$ kociek vo vnútri stien veľkej kocky prispieva najviac $1$ čiernym štvorčekom,
- $8$ kociek vo vnútri veľkej kocky neprispieva do povrchu veľkej kocky žiadnym štvorčekom.

Chceme maximalizovať počet celkom bielych kociek, čo je však to isté, ako minimalizovať počet kociek s aspoň jednou čiernou stenou. Intuitívne najlepšími kandidátmi na začiernenie je teda všetkých $8$ rohových kociek (tie spolu môžu prispieť $8 \times 3 = 24$ čiernymi štvorčekmi) doplnené $12$ z $24$ hranových (tie spolu môžu prispieť chýbajúcimi $12 \times 2 = 24$ čiernymi štvorčekmi), čo je spolu $20$ nebielych kociek pokrývajúcich $48$ čiernych políčok. Otázkou však je, či tieto elementárne kocky a hlavne ich čierne steny naozaj vieme rozmiestniť tak, aby na každej stene veľkej kocky bolo práve $8$ štvorčekov. Ľahko však vidieť, že takéto rozmiestnenie je naozaj možné, a to napríklad tak, že každá stena potom bude vyzerať buď ako na nasledujúcom obrázku, alebo súmerne podľa zvislej osi:



Treba však ešte dokázať, že menej ako $20$ aspoň trochu čiernych (a teda viac ako $44$ úplne bielych) kociek nevyhovuje: Ak označíme $r_3$ počet elementárnych kociek s troma čiernymi stenami (tie musia byť rohové, a teda nutne $r_3 \leq 8$), $r_2$ počet elementárnych kociek s dvoma čiernymi stenami a $r_1$ s jednou stenou, počet čiastočne začiernených kociek bude $r_3 + r_2 + r_1$, a tie spolu majú $3r_3 + 2r_2 + r_1$ čiernych štvorčekov. Platí teda $3r_3 + 2r_2 + r_1 = 48$. Ak je však $r_3 + r_2 + r_1 \leq 19$, odčítaním dostávame $2r_3 + r_2 \geq 29$. Keďže však $r_3 \leq 8$, platí $16 + r_2 \geq 2r_3 + r_2 \geq 29$, a teda $r_2 \geq 13$. Zo vzťahu $r_3 + r_2 \leq r_3 + r_2 + r_1 \leq 19$ však potom dostávame, že $r_3 \leq 6$, a teda $12 + r_2 \geq 2r_3 + r_2 \geq 29$, z čoho $r_2 \geq 17$. A opäť zo vzťahu $r_3 + r_2 \leq r_3 + r_2 + r_1 \leq 19$ však potom dostávame, že $r_3 \leq 2$, a teda $4 + r_2 \geq 2r_3 + r_2 \geq 29$, a teda $r_2 \geq 25$. Potom však $25 \leq r_2 \leq r_3 + r_2 + r_1 \leq 19$, čo je spor.

Ukázali sme teda, že celkom bielych kociek je najviac $64 - 20 = 44$, pričom toto číslo skutočne vieme dosiahnuť.

**Komentár (oprava Majka Kolková):**

Ak riešiteľ delil kocky na rohové, hranové a stenové, začierňoval ich v správnom poradí. Toto zdôvodnili piati z ôsmich úspešných riešiteľov (dôsledne to urobili traja).

Zváženie možnosti, čo keby sa $12$ hranových kociek vhodne rozmiestniť nedalo, bolo zriedkavé. No keďže v zadaní bola výzva na náčrt kocky z jednotlivých pohľadov, nebolo to nevyhnutné.

V riešeniach často chýbal začiatok („Kocka bude mať rozmery $4 \times 4 \times 4$ a na každej stene po $8$ čiernych aj bielych štvorčekov.“), za ktorý som udeľovala bod. Tiež sa našli riešenia, ktoré vysvetlili princíp, ale neuviedli výpočet.

---

**4 Zadanie (výber Inga Semanišinová):**

Jakub má tento školský rok priemer všetkých svojich známok presne $1,85$. Za celý školský rok dostal iba štyri pätorky a práve tretina jeho známok boli jednotky. Najmenej koľko známok musel tento školský rok dostať?

**Riešenie:**

Označme počet všetkých známok $n$, počet dvojok $d$, počet trojok $t$ a počet štvoriek $s$. Je zrejmé, že ide o prirodzené čísla. Na základe zadania platia nasledujúce vzťahy:

$$\frac{1 \cdot \frac{n}{3} + 2 \cdot d + 3 \cdot t + 4 \cdot s + 5 \cdot 4}{n} = \frac{37}{20}, \qquad (1)$$

$$\frac{n}{3} + d + t + s + 4 = n. \qquad (2)$$

Keďže priemer známok sa má rovnať zlomku $\frac{37}{20}$, ktorý je v základnom tvare, tak počet známok $n$ musí byť kladným násobkom čísla $20$. Zároveň zo zadania úlohy vieme, že počet známok je číslo deliteľné tromi. Najmenšie $n$, ktoré spĺňa uvedené požiadavky, je $60$. Z rovnice (1) vyplýva, že čitateľ v zlomku na jej pravej strane je číslo $z$ také, že $\frac{z}{60} = \frac{37}{20}$ a teda $z = 111$. Dostaneme $2 \cdot d + 3 \cdot t + 4 \cdot s = 111 - 20 - 20 = 71$. Keďže dvojok, trojok a štvoriek je $36$, platí $2 \cdot d + 3 \cdot t + 4 \cdot s \geq 2(d + t + s) = 72 > 60$, a teda pre $n = 60$ nevieme nájsť také $d$, $t$ a $s$, aby aritmetický priemer známok bol $1,85$.

Uvažujme teda $n = 2 \cdot 60 = 120$. Z rovnice (1) vyplýva, že čitateľ v zlomku na jej pravej strane je číslo $222$. Dostávame:

$$2 \cdot d + 3 \cdot t + 4 \cdot s = 222 - 40 - 20 = 162,$$

$$d + t + s = 76.$$

Riešením tejto sústavy za podmienky, že čísla $d$, $t$, $s$ sú prirodzené (napríklad tak, že z druhej rovnice vyjadríme $s$ a dosadíme do prvej a následne riešime diofantickú rovnicu o dvoch neznámych), dostaneme nasledujúce usporiadané trojice $\langle d, t, s \rangle$:

$$\langle 71, 0, 5 \rangle,\ \langle 70, 2, 4 \rangle,\ \langle 69, 4, 3 \rangle,\ \langle 68, 6, 2 \rangle,\ \langle 67, 8, 1 \rangle,\ \langle 66, 10, 0 \rangle.$$

Zo zadania úlohy vyplýva, že stačilo nájsť jednu takú trojicu.

**Komentár (oprava Inga Semanišinová):**

Niektorí riešitelia zabudli na podmienku z úlohy, že priemer je presne $1,85$. Ďalej mnohí zistili, že minimálne $n$ je $60$, ale nenašli správne hodnoty $d$, $t$, $s$, prípadne ich nehľadali vôbec. Za uhádnuté riešenia, bez potrebných odôvodnení sme udelili 1 bod.

Najkrajšie riešenia mali Štefan Kyšeľa a Jaroslav Šupina.

---

**5 Zadanie (výber Janka Mihalčová-Pócsová):**

Hry sa zúčastnia traja hráči – Adam, Boris a Cyril. Najprv hádže kockou Adam. Ak padne číslo 1, tak sa hra končí jeho víťazstvom. Ak padne iné číslo, tak kockou hádže Boris. Ak Boris hodí 2 alebo 3, tak víťazí. Ak padne iné číslo, tak kockou hádže Cyril. Ak Cyril hodí 4, 5 alebo 6, tak víťazí. Ak padne iné číslo, hra sa vracia na svoj začiatok, a teda hádže opäť Adam. Vypočítajte pravdepodobnosť víťazstva pre každého hráča.

**Riešenie:**

Vypočítame pravdepodobnosť výhry každého z hráčov v prvom kole, ako i pravdepodobnosť, že hra neskončí v prvom kole víťazstvom žiadneho z hráčov.

V prvom kole vyhrá Adam s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$ (ak Adam hodí 1, hra končí jeho víťazstvom). Ak Adam hodí iné číslo ako $1$ (s pravdepodobnosťou $\frac{5}{6}$), pokračuje v tomto kole Boris. Pravdepodobnosť, že Boris hodí $2$ alebo $3$, je $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, teda pravdepodobnosť jeho výhry je

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}.$$

Pravdepodobnosť, že sa k ťahu dostane Cyril, t. j. že ani Adam, ani Boris hru neukončili, je $1-\frac{1}{6}-\frac{5}{18}=\frac{5}{9}$ (alternatívna, ale ekvivalentná podmienka je, že ani Adamovi, ani Borisovi nepadli vyhrávajúce čísla, čiže pravdepodobnosť Cyrilovho ťahu je $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$). Pravdepodobnosť, že mu padne číslo 4, 5, alebo 6, je $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, teda pravdepodobnosť, že vyhrá v tomto kole on, je

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}.$$

Pravdepodobnosť, že v prvom kole nevyhrá ani jeden z hráčov, je $\frac{5}{18}$ (t. j. $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}$, teda že ani jeden z nich nehodí svoje vyhrávajúce čísla, resp. ekvivalentne $1-\frac{1}{6}-\frac{5}{18}-\frac{5}{18}$, teda že ani jeden z nich hru neukončil). S touto pravdepodobnosťou teda hra pokračuje druhým kolom.

V druhom (a každom ďalšom) kole sa pravdepodobnosti výhier Adama, Borisa, Cyrila a nikoho (túto situáciu nazvime remízou) rozdelia v rovnakom pomere, a to $\frac{1}{6}:\frac{5}{18}:\frac{5}{18}:\frac{5}{18}$ (teda $3:5:5:5$). To, že Adam vyhrá práve v $(n+1)$. kole (kde $n\in\mathbb{N}$), znamená, že predchádzajúcich $n$ kôl skončilo „remízou“ a v $(n+1)$. kole hru ukončil on, pravdepodobnosť tejto situácie je preto $(\frac{5}{18})^n\cdot\frac{1}{6}$. Celková pravdepodobnosť Adamovej výhry je teda

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{18}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{18}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{18}\right)^n=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{18}}=\frac{3}{13}.$$

Pravdepodobnosť, že vyhrá Boris, je analogicky

$$\frac{5}{18}+\frac{5}{18}\cdot\frac{5}{18}+\left(\frac{5}{18}\right)^2\cdot\frac{5}{18}+\left(\frac{5}{18}\right)^3\cdot\frac{5}{18}+\cdots=\frac{5}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{18}\right)^n=\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{18}}=\frac{5}{13}.$$

Pravdepodobnosť, že vyhrá Cyril, je zhodná s Borisovou.

**Komentár (oprava Janka Mihalčová-Pócsová):**

Túto úlohu riešilo 11 študentov, a z tohto počtu, žiaľ, iba 3 mali úplné riešenie: M. Derňár, M. Diheneščíková a Š. Kyšela.

Najčastejšia chyba bola, že ste si neuvedomili, že táto hra nemusí skončiť po prvom kole, ale že môže pokračovať dlhšie.

---

## 6 Zadanie (výber Stano Krajči):

V priestore je daných deväť bodov s celočíselnými súradnicami. Dokážte, že z nich možno vybrať dva body tak, že stred úsečky nimi určenej má celočíselné súradnice.

**Riešenie:**

Vieme, že stredom úsečky s krajnými bodmi $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ a $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ je bod $S = \langle \frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2} \rangle$. Nech sú všetky súradnice bodov $A$ aj $B$ celočíselné. Všetky súradnice bodu $S$ budú potom celočíselné práve vtedy, keď $2|(a_1 + b_1)$, $2|(a_2 + b_2)$ a $2|(a_3 + b_3)$, čo znamená, že (celé) čísla v dvojiciach $\langle a_1, b_1 \rangle$, $\langle a_2, b_2 \rangle$ aj $\langle a_3, b_3 \rangle$ majú rovnakú paritu (t. j. buď sú obe párne, alebo sú obe nepárne).

Všetky body s celočíselnými súradnicami teda rozdeľme do takýcho skupín podľa parity ich troch súradníc: Ak $r_1, r_2, r_3 \in \{0, 1\}$, tak položme

$$M_{r_1,r_2,r_3} = \{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle : (a_1 \bmod 2 = r_1) \wedge (a_2 \bmod 2 = r_2) \wedge (a_3 \bmod 2 = r_3)\},$$

pričom $x \bmod y$ je zvyšok po celočíselnom delení čísla $x$ číslom $y$. (Takže napríklad bod $\langle -3, 4, 7 \rangle$ patrí do $M_{1,0,1}$, lebo $-3 \bmod 2 = 1$, $4 \bmod 2 = 0$ a $7 \bmod 2 = 1$.) Takýchto skupín je zrejme $8$, lebo pre každú z troch súradníc máme k dispozícii dve možnosti.

Bodov zo zadania je však $9$, podľa Dirichletovho princípu preto musia byť aspoň dva z nich v tej istej skupine, čiže ich zodpovedajúce súradnice majú rovnakú paritu. Ak sme však už ukázali, znamená to, že stred úsečky nimi určenej má celočíselné súradnice, čo sme chceli dokázať.

**Komentár (oprava Stano Krajči):**

V riešeniach sa vyskytli nedostatky dvoch typov, oba boli potrestané stratou jedného bodu:

- Riešitelia pri zdôvodňovaní uvažovali len intuitívne „najhoršiu“ možnosť, a to, že každý z „prvých“ ôsmich bodov padne do inej z popísaných ôsmich skupín. Čo však v prípade, že sa tak nestane, teda ak máme body nevhodne usporiadané, alebo ak sa tak ani usporiadať nedajú (t. j. keď do jednej zo skupín nepadne žiaden bod)? Takto by sme mohli postupovať iba vtedy, keby bola „dobrosť“, a teda i „najhoršosť“, vyjadrená exaktne.
- Na označenie v princípe rôznych objektov (v našom prípade ide o tri párne čísla) treba použiť rôzne premenné! Napríklad to, že súčet dvoch párnych čísel je párny, nemožno zapisovať v tvare $P + P = P$ – tejto rovnici totiž (v obore celých čísel) vyhovuje jedine $P = 0$.

---