KRVOPOT

2. séria, 2007/2008

Riešenia a komentáre

1 Zadanie (výber Ondrej Hutník):

Nech $\mathrm{A}(x, y)$ je aritmetický priemer čísel x, y. Dokážte, že ak x, y sú kladné čísla a m je prirodzené číslo, tak platí $\mathrm{A}^m(x, y) \le \mathrm{A}(x^m, y^m)$.

Riešenie:

Uvedieme dve riešenia:

- Prvé riešenie je založené na matematickej indukcii.
  1. Ľahko vidieť, že vzťah pre $m = 0$ platí, a to dokonca s rovnosťou: $\mathrm{A}^0(x, y) = 1 = \mathrm{A}(1, 1) = \mathrm{A}(x^0, y^0)$.
  2. Najprv si uvedomme platnosť vzťahu $(x^m - y^m)(x - y) \ge 0$: Ak platí $x > y$, tak zrejme $x^m > y^m$ (lebo kladná mocninová funkcia je na kladných číslach rastúca), a teda naozaj $(x^m - y^m)(x - y) > 0$ (súčin dvoch kladných čísel). Ak platí $x < y$, tak zrejme $x^m < y^m$ (z rovnakých dôvodov), a teda $(x^m - y^m)(x - y) > 0$ (súčin dvoch záporných čísel). V zostávajúcom prípade, keď $x = y$, zrejme platí $(x^m - y^m)(x - y) = 0$. (Iným argumentom je použitie vzorca $x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-1} + y^m)$, potom totiž $(x^m - y^m)(x - y) = (x - y)^2(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-1} + y^m) \ge 0$ (súčin nezáporného a kladného čísla).)
     Predpokladajme teda, že platí vzťah $\mathrm{A}^m(x, y) \le \mathrm{A}(x^m, y^m)$, t. j. $\frac{(x+y)^m}{2^m} \le \frac{x^m+y^m}{2}$. Potom platí $\mathrm{A}^{m+1}(x, y) = \frac{(x+y)^{m+1}}{2^{m+1}} = \frac{(x+y)^m}{2^m} \cdot \frac{x+y}{2} \le \frac{x^m+y^m}{2} \cdot \frac{x+y}{2} = \frac{x^{m+1}+y^{m+1}}{2} - \frac{1}{4}(x^m - y^m)(x - y) \le \frac{x^{m+1}+y^{m+1}}{2} = \mathrm{A}(x^{m+1}, y^{m+1})$.
- Druhé riešenie využíva skôr vysokoškolské metódy:
  Ľahko vidieť, že pre funkciu f s definičným oborom $\mathbb{R}^+$ definovanú vzťahom $f(x) = x^m$, kde $m \ge 2$, platí $f'(x) = mx^{m-1}$ a $f''(x) = m(m-1)x^{m-2} > 0$, takže f je (na celom svojom definičnom obore) konvexná. Podľa neveľmi známej, ale veľmi užitočnej *Jensenovej nerovnosti* pre konvexnú f platí $f(\frac{x+y}{)}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$, čo je presne požadovaný vzťah $\mathrm{A}^m(x, y) \le \mathrm{A}(x^m, y^m)$.
  Ostávajú ešte prípady $m \in \{0, 1\}$, tie však overíme bezprostredne: $\mathrm{A}^0(x, y) = 1 = \mathrm{A}(1, 1) = \mathrm{A}(x^0, y^0)$ a $\mathrm{A}^1(x, y) = 1 = \mathrm{A}(x, y) = \mathrm{A}(x^1, y^1)$.

Komentár (oprava Stano Krajči):

Úlohu riešili len traja riešitelia, vyskytli sa obe spomínané riešenia.

---

2 Zadanie (výber Janka Hajduková):

Majme obdĺžnik rozmeru 1×25, rozdelený na 25 malých štvorčekov. Rozhodnite, či je možné zapísať prirodzené čísla od 1 do 25, každé do jedného štvorčeka, bez opakovania a tak, aby súčet čísel v ľubovoľných dvoch susedných štvorčekoch bol druhá mocnina celého čísla. Ak sa to dá, uveďte vhodné usporiadanie týchto 25 čísel. Ak sa to nedá, vysvetlite prečo.

Riešenie:

Ako súčty dvoch rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 25\}$ prichádzajú do úvahy len čísla 4, 9, 16, 25, 36 a 49. Napíšme ku každému číslu jeho možných susedov, t. j. doplnky do týchto súčtov, ktoré sú tiež z tejto množiny a sú od neho rôzne:

číslo	4	9	16	25	36	49
1	3	8	15	24	–	–
2	–	7	14	23	–	–
3	1	6	13	22	–	–
4	–	5	12	21	–	–
5	–	4	11	20	–	–
6	–	3	10	19	–	–
7	–	2	9	18	–	–
8	–	1	–	17	–	–
9	–	–	7	16	–	–
10	–	–	6	15	–	–
11	–	–	5	14	25	–
12	–	–	4	13	24	–
13	–	–	3	12	23	–
14	–	–	2	11	22	–
15	–	–	1	10	21	–
16	–	–	–	9	20	–
17	–	–	–	8	19	–
18	–	–	–	7	–	–
19	–	–	–	6	17	–
20	–	–	–	5	16	–
21	–	–	–	4	15	–
22	–	–	–	3	14	–
23	–	–	–	2	13	–
24	–	–	–	1	12	25
25	–	–	–	–	11	24

Ak si teraz načrtneme graf, ktorého vrcholy reprezentujú všetkých 25 čísel a hrany sú dané touto tabuľkou, úloha sa redukuje na nájdenie cesty zloženej z niektorých týchto hrán a prechádzajúcej každým vrcholom práve raz, t. j. . hamiltonovskej cesty. Pre zaujímavosť uveďme, že vrchol 18 musí byť na jednom jej konci – má totiž len jedného suseda. Jedným z viacerých riešení je potom napríklad cesta $18 \to 7 \to 9 \to 16 \to 20 \to 5 \to 4 \to 21 \to 15 \to 10 \to 6 \to 19 \to 17 \to 8 \to 1 \to 3 \to 22 \to 14 \to 2 \to 23 \to 13 \to 12 \to 24 \to 25 \to 11$, ktorej zodpovedá príslušné vyplnenie obdĺžnika 1×25 zo zadania.

Dodajme, že na splnenie (trochu nešikovného) zadania stačilo napísať iba riešenie, postup sa nevyžadoval.

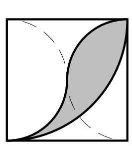
Komentár (oprava Stano Krajči):

Keď bola úloha správne pochopená, nerobila problémy, vzhľadom na jej príliš benevolentné zadanie sme jednoducho museli uznávať každé riešenie obsahujúce výsledok. Vyskytli sa dokonca zaujímavé a pomerne úspešné pokusy nájsť všetky riešenia, čo je však nad rámec zadania úlohy.

---

3 Zadanie (výber Janka Hajduková):

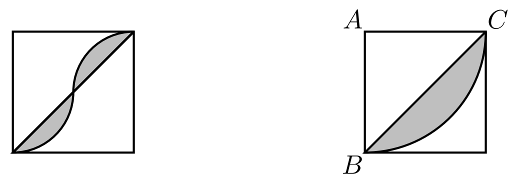
Vypočítajte obsah a obvod sivej plochy, ak strana štvorca meria $10\,\mathrm{cm}$.



Riešenie:

Hranica útvaru je tvorená troma kružnicovými štvrťoblúkmi, pričom polomer najväčšieho z nich je rovný hrane štvorca $a = 10\,\mathrm{cm}$ a polomer zvyšných dvoch menších je rovný jej polovici. Jeho obvod je preto $\frac{1}{4}(2\pi a) + 2 \cdot \frac{1}{4}(2\pi \frac{a}{2}) = \frac{\pi}{a} = 10\pi\,\mathrm{cm}$.

Pokiaľ ide o obsah, všimnime si, že dve sivé plôšky na prvom obrázku sú zhodné, a teda majú rovnaký obsah.



To ale znamená, že pôvodný útvar má rovnaký obsah ako útvar na druhom obrázku, a ten vznikne odčítaním obsahu trojuholníka $\triangle ABC$ od obsahu jemu opísaného štrvrťkruhu, je teda rovný $\frac{1}{4}(\pi a^2) - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}a^2(\pi - 2) = 25(\pi - 2)\,\mathrm{cm}^2$

Komentár (oprava Stano Krajči):

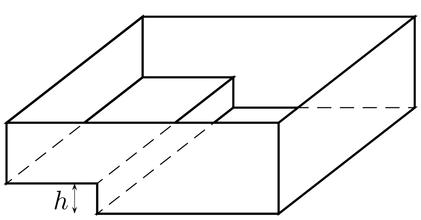
Prejavila sa tu častá chyba – nechuť pracovať s inými číslami než desatinnými. V matematike však požadujeme presné výsledky, a tie sa často (napríklad v tejto úlohe) jednoducho vyjadriť desatinným číslom nedajú! Treba si uvedomiť, že $\pi \neq 3,14$!

Za nedostatok treba považovať aj nekonzistentnosť v uvádzaní fyzikálnych jednotiek. Slovo „jednotka" neznamená, že je rovná 1, a teda že ju netreba písať!

---

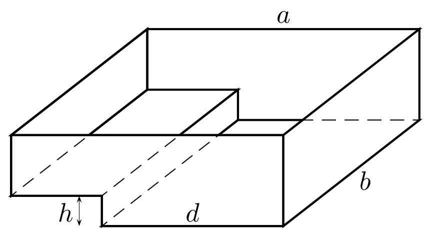
4 Zadanie (výber Janka Hajduková):

Na obrázku vidíte bazén s dlhým schodom pri jednej jeho stene. Prázdny bazén sme začali napúšťať prívodom s konštantným prietokom a sledovali sme výšku hladiny. Za 8 minút hladina vystúpila do výšky $20\,\mathrm{cm}$ a dovtedy ešte nebola na úrovni schodu. Po 23 minútach napúšťania sa hladina nachádzala vo výške $55\,\mathrm{cm}$ od dna a schod už bol nejakú dobu pod hladinou. Po $35,5$ minútach napúšťania bol bazén naplnený do výšky $80\,\mathrm{cm}$. Aká je výška h schodu?



Riešenie:

Označme na obrázku rozmery bazéna a (vrchná šírka), b (dĺžka) a d (spodná šírka). Všimnime si, že zo zadania vyplýva $20\,\mathrm{cm} < h < 55\,\mathrm{cm}$.



Ak prietok vody označíme p, objem natečený za čas t bude pt. Rozoberme tri časové etapy:

- V čase od $0\,\mathrm{min}$ do $8\,\mathrm{min}$, teda za prvých $8\,\mathrm{min}$, voda vypĺňala len časť bazéna pod schodíkom vo výške $20\,\mathrm{cm}$, teda kváder s rozmermi d, b a $20\,\mathrm{cm}$. Platí teda $p \cdot 8\,\mathrm{min} = db \cdot 20\,\mathrm{cm}$.
- V čase od $8\,\mathrm{min}$ do $23\,\mathrm{min}$, teda za ďalších $15\,\mathrm{min}$, voda vypĺňala jednak zvyšok časti pod schodíkom, teda kváder s rozmermi d, b a $h - 20\,\mathrm{cm}$, a jednak časť bazéna nad schodíkom do výšky $55\,\mathrm{cm}$, teda kváder s rozmermi a, b a $55\,\mathrm{cm} - h$. Platí teda $p \cdot 15\,\mathrm{min} = db \cdot (h - 20\,\mathrm{cm}) + ab \cdot (55\,\mathrm{cm} - h)$.
- V čase od $23\,\mathrm{min}$ do $35{,}5\,\mathrm{min}$, teda za posledných $12{,}5\,\mathrm{min}$, voda vypĺňala časť bazéna nad schodíkom od výšky $55\,\mathrm{cm}$ do výšky $80\,\mathrm{cm}$, teda kváder s rozmermi a, b a $25\,\mathrm{cm}$. Platí teda $p \cdot 12{,}5\,\mathrm{min} = ab \cdot 25\,\mathrm{cm}$.

Dostali sme tak sústavu troch rovníc o štyroch neznámych, našou úlohou je zistiť hodnotu h.

Z prvej rovnice dostávame $p = db \cdot \frac{20\,\mathrm{cm}}{8\,\mathrm{min}} = db \cdot 2{,}5\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$. z tretej $p = ab \cdot \frac{25\,\mathrm{cm}}{12{,}5\,\mathrm{min}} = ab \cdot 2\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$. V spodnej časti teda stúpne voda za minútu o $2{,}5$ centimetra, v hornej o 2 centimetre. Porovnaním týchto dvoch vzťahov dostávame $db \cdot 2{,}5\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} = ab \cdot 2\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$, z čoho (po vydelení nenulovými b a $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$) dostávame $d = \frac{4}{5}a$. Dosadením do druhej rovnice za p a d dostávame: $ab \cdot 2\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} \cdot 15\,\mathrm{min} = \frac{4}{5}ab \cdot (h - 20\,\mathrm{cm}) + ab \cdot (55\,\mathrm{cm} - h)$, t. j. (po vydelení nenulovým ab) $30\,\mathrm{cm} = \frac{4}{5} \cdot (h - 20\,\mathrm{cm}) + (55\,\mathrm{cm} - h)$, čo je lineárna rovnica s neznámou h, ktorej jediným riešením je práve $h = 45\,\mathrm{cm}$. Táto hodnota pritom dáva zmysel, pretože pre ňu platí $20\,\mathrm{cm} < h < 55\,\mathrm{cm}$.

Zrekonštruujeme celú situáciu (čo môžeme právom považovať za skúšku správnosti):

- Za prvých 8 minút voda vystúpila (rýchlosťou stúpania $2{,}5\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$) z prázdneho bazéna do výšky $20\,\mathrm{cm}$. Bola teda naozaj ešte pod schodíkom.
- V čase 18 minút (t. j. 10 minút po predošlej udalosti) voda vystúpila (stále rýchlosťou stúpania $2{,}5\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$) o $25\,\mathrm{cm}$, teda z výšky $20\,\mathrm{cm}$ na $45\,\mathrm{cm}$, čo je práve do výšky schodíka.
- V čase 23 minút (t. j. 5 minút po predošlej udalosti) voda vystúpila (už rýchlosťou stúpania $2\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$) o $10\,\mathrm{cm}$ z tejto výšky schodíka, t. j. do výšky $55\,\mathrm{cm}$. Schodík tu už teda bol pod hladinou.
- V čase $35{,}5$ minúty (t. j. $12{,}5$ minúty po predošlej udalosti) voda vystúpila (rýchlosťou stúpania $2\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$) o ďalších $25\,\mathrm{cm}$, teda z výšky $55\,\mathrm{cm}$ do výšky $80\,\mathrm{cm}$.

Komentár (oprava Stano Krajči):

Niektorí riešitelia sa z neznámych dôvodov obmedzili na hľadanie celočíselného riešenia. To je však hlavne v takýchto fyzikálne ladených úlohách neopodstatnený predsudok.

Zarazila aj častá neschopnosť zostaviť zodpovedajpcu sústavu rovníc. Niektorým sa to aj podarilo, ale akoby sa jej zľakli – vôbec im nenapadlo riešiť ju matematicky.

V podstate všetci zabudli urobiť skúšku, čo je v tomto prípade akási rekonštrukcia udalostí zodpovedajúcich zadaniu.

Aj v tejto úlohe sa prejavovala nekonzistencia v (ne)písania fyzikálnych jednotiek.

---

5 Zadanie (výber Ivka Kovárová a Janka Mihalčová):

Rozšifrujte otázku v nasledujúcom texte:

```
SHGDJRJLFNH CDVDGB SUL ULHVHQL PDWHPDWLFNBFK XORK

DN FKFHPH, DEB CLDFL ULHVLOL PDWHPDWLFNX XORKX, PXVLPH LP MX CDGDW. LFK VDPRWQBFK QLNGB QHQDSDGQH, DEB VL QHMDNX CDGDOL VDPL. YBEHUX YKRGQHM XORKB
YHQXMHPH URYQDNX SRCRUQRVW DNR YBEHUX CLYRWQHKR SDUWQHUD. DYVDN CDWLDO FR SUL YROEH SDUWQHUD MH URCKRGXMXFH, FL YBVND QDVKR CLYRWQHKR PLQLPD SR
VYDGEH EXGH YDFVLD QHC YBVND QDVKR CLYRWQHKR PDALPD SUHG VYDGERX, SUL YROEH SULNODGX URCKRGXMH WR, FL VD KR EHKRP SUHVWDYNB QDXFLPH YBULHVLW.
CLDFNX RVREQRVW URCYLMDPH SUL NDCGHM SULOHCLWRVWL, DOH WDN, DEB QHSUHUDVWOD FHC KODYX QDVHM RVREQRVWL. SUL WOPHQL CLDFNHM RVREQRVWL SRVWXSXMHPH
KXPDQQH D WDN, DEB VPH PDOL DOLEL. PDWHPDWLFNH XORKB GHOLPH QD VSUDYQH, FR VX XORKB, NWRUH YBULHVLW YLHPH, D QD QHVSUDYQH, NWRUH WLHC YBULHVLW
YLHPH, DOH YCGB, NHG LFK FKFHPH ULHVLW, QDP GR WRKR QLHFR SULGH. SULSUDYD QD KRGLQX EB PDOD REVDKRYDW OHQ XORKB VSUDYQH. XORKD PD XPRCQLW, DEB VPH
VD SUHG CLDNPL XNDCDOL D QDSUDYLOL VL WDN UHSXWDFLX SRVNRGHQX QD PLQXOHM KRGLQH, NHG VPH SULOLV QHVNRUR CLVWLOL, CH ULHVLPH XORKX QHVSUDYQX D
QHEROL VPH QLNDP RGYRODQL. SUHG CDGDQLP XORKB YBWYRULPH Y WULHGH XVPHYQH SURVWUHGLH, DEB SR MHM CDGDQL PRKRO CLDNRP XVPHY QD SHUDFK CPUCQXW. SR
WBFKWR GROHCLWBFK SULSUDYDFK XC CLDFL YDFVLQRX UHCLJQXMX, D VX WDN QD ULHVHQLH XORKB SULSUDYHQL. PXVLPH LFK YVDN SULSUDYLW L QD WR, CH VD YREHF
QHSRGDUL XORKX YBULHVLW. QLNGB QHSULSXVWLPH, CH EB QHYBULHVHQLH XORKB PRKOR PDW QHMDNX VXYLVORVW V QDVLPL CQDORVWDPL. QHYBULHVHQLH XORKB MH YCGB
VSRVREHQH QHGRVWDWNRP FDVX. SUHWRCH PDMX CLDFL GRPD FDVX GRVW, GDPH LP MX CD GRPDFX XORKX. ULHVHQLH XORK URCGHOXMHPH QD YODVWQH, NHG LFK ULHVLPH
YODVWQBPL VLODPL D CDURYHQ SLVHPH QD WDEXOX, D QD QHYODVWQH, NHG LFK WLHC ULHVLPH YODVWQBPL VLODPL, DOH CDSLV QD WDEXOL MH VSURVWUHGNRYDQB
YBYRODQBP CLDNRP. SUL QHYODVWQRP ULHVHQL PRCH GRMVW N WRPX, CH CLDN QHSRFKRSL, CH VOXCL OHQ DNR CDSLVRYDWHO QDVLFK PDWHPDWLFNBFK LGHL, D VQDCL VD
QDP YQXWLW LQB VSRVRE ULHVHQLD, QHC NWRUB YLHPH, SULFRP MHKR VSRVRE YREHF QHYLHPH. CLDFNH ULHVHQLH, NWRUH VD OLVL RG ULHVHQLD QDVKR, MH YCGB
QHURCXPQH. CLDNRYL, NWRUB CDFDO XORKX ULHVLW LQDN, QHC VL SUHGVWDYXMHPH, MH QXWQH VHWUQH YBVYHWOLW, CH MHKR SRVWXS QLNDP QHYHGLH. DN VD CLDN RGYDCL
XORKX ULHVLW LQDN, QHC VL SUHGVWDYXMHPH, RNDPCLWH N QHPX SULVWXSLPH D QHQDSDGQH CPDCDYDMXF MHKR SRVWXS VD RSBWDPH, FL PX QLF OHSVLH QHQDSDGOR.
GROHCLWH XSRCRUQHQLH SUH CDFLQDMXFLFK SHGDJRJRY: RWDCNX "NWRUB KOXSDN YDV WR WDNWR XFLO?" NODGLHPH OHQ Y WRP SULSDGH, NHG VPH VL LVWL, CH VPH WR
QHEROL PB DQL ULDGLWHO VNROB. NDCGD FKBED, NWRUX XURELPH, MH FKBED XPBVHOQD. FKBE QHXPBVHOQBFK VD CDVDGQH QHGRSXVWDPH. YBULHVHQB SULNODG QHFKDPH Y
WULHGH QLHNRONR PLQXW GRCQLHW, SUHWRCH SUHYDCQD FDVW CLDNRY YREHF QHYLH, FR VPH YODVWQH YBSRFLWDOL. DN YLHPH GDQB SULNODG YBULHVLW URCQBPL
VSRVREPL, XNDCHPH LFK. MHGQBP VSRVRERP MH CLDN GHSULPRYDQB OHQ UDC. D QD CDYHU YVHREHFQD SHGDJRJLFND CDVDGD: L XFLWHO PRCH EBW QD NRQFL VYRMHM
NDULHUB SULMDWB OXGVNRX VSRORFQRVWRX CD SOQRSUDYQHKR FOHQD.
```

Riešenie:

V prvom rade si poriadne všimnime celý text. Popri písmenách (ktoré vôbec neobsahujú diakritické znamienka) sa v ňom vyskytujú aj medzery a interpunkčné znamienka (ako bodky a čiarky), a to v rozmiestnení (zahŕňajúcom množstvo i hustotu), ktoré je porovnateľné s ich rozmiestnením v obyčajnom texte. Z tejto prirodzenosti môžeme usúdiť, že šifrované budú len písmená, a to jedno písmeno jedným písmenom. Tu si všimnime, že v texte sa vyskytuje jediný otáznik a že veta, ktorá sa ním končí, je uzavretá v úvodzovkách. Zrejme pôjde o otázku, o ktorej sa hovorí v zadaní úlohy.

Ďalší predpoklad je, že každé písmeno bude šifrované vždy rovnakým písmenom (inými slovami, že pôjde o najjednoduchšiu *substitučnú šifru*). Tento predpoklad je možno naivný, ale v jeho prospech svedčí to, že pri texte nie je uvedený žiaden kľúč, podľa ktorého by sa dalo usúdiť, kedy sa písmeno šifruje tak a kedy inak. Ako argument za tiež možno považovať fakt, že máme k dispozícii pomerne dlhý text, hoci rozšifrovať stačí len jeho jednu vetu.

Ak je toto všetko pravda, mohla by tu poslúžiť *frekvenčná analýza*, ktorá spočíva v zistení frekvencií výskytu jednotlivých šifrujúcich písmen a v ich porovnaní s relatívne konštantnými frekvenciami písmen v bežnom texte. Tu dodajme, že veľmi pravdepodobne pôjde o slovenský text (a asi bez diakritiky), keďže zadávateľ nemôže predpokladať, že (azda okrem češtiny) existuje iný jazyk, ktorý všetci riešitelia ovládajú.

Frekvenčnú analýzu tu však robiť nebudeme, využijeme radšej predpoklad, že poznáme dĺžky slov a hlavne ich pozície vo vete. Zamerajme sa na slová, ktoré sa vyskytujú po čiarkach, vieme totiž, že často to býva spojka `že` alebo nejaký tvar zámena `ktorý`. V našom zašifrovanom texte má po čiarke najčastejší výskyt slovo `CH`, je tam až 7-krát. Môžeme sa teda domnievať, že pôjde o zašifrované slovo `ZE`, teda časť šifry by mohla byť `C`↦`Z` a `H`↦`E`. Zaujímavá je tam i trojica (zhodou okolností jediných) päťpísmenných slov `NWRUH` (po čiarke 3-krát), `NWRUB` (raz) a `NWRUX` (tiež iba raz), čo by mohli byť tvary spomínaného slova `ktorý` (nasvedčuje tomu i jeho možná prítomnosť na začiatku otázky, ktorú treba rozšifrovať). Dostávame tak `N`↦`K`, `W`↦`T`, `R`↦`O`, `R`↦`U`.

Dá sa predpokladať, že dvojice tvorené šifrujúcim a šifrovaným písmenom nie sú vyrábané náhodne. Všeobecne známym poriadkom písmen je abeceda, v tomto prípade zrejme anglická (resp. latinská). A tu si už iba stačí všimnúť, že v našich šiestich dvojiciach je vždy šifrované písmeno o tri znaky pred svojou šifrou (v prípade začiatku abecedy prejdeme cyklicky na jej koniec). Môžeme sa teda azda právom domnievať, že to tak bude aj s ostatnými písmenami. A naozaj, odšifrovaním textu v úvodzovkách (`NWRUB KOXSDN YDV WR WDNWR XFLO?`) dostávame otázku (`KTORY HLUPAK VAS TO TAKTO UCIL?`), na ktorú radšej nebudeme vyžadovať odpoveď...

Ako bonus uveďme celý odšifrovaný text (bez diakritiky), ktorého autorom je český didaktik matematiky doc. Emil Calda:

PEDAGOGICKE ZASADY PRI RIESENI MATEMATICKYCH ULOH

AK CHCEME, ABY ZIACI RIESILI MATEMATICKU ULOHU, MUSIME IM JU ZADAT ICH SAMOTNYCH NIKDY NENAPADNE, ABY SI NEJAKU ZADALI SAMI. VYBERU VHODNEJ ULOHY VENUJEME ROVNAKU POZORNOST AKO VYBERU ZIVOTNEHO PARTNERA. AVSAK ZATIAL CO PRI VOLBE PARTNERA JE ROZHODUJUCE, CI VYSKA NASHO ZIVOTNEHO MINIMA PO SVADBE BUDE VACSIA NEZ VYSKA NASHO ZIVOTNEHO MAXIMA PRED SVADBOU, PRI VOLBE PRIKLADU ROZHODUJE TO, CI SA HO BEHOM PRESTAVKY NAUCIME VYRIESIT. ZIACKU OSOBNOST ROZVIJAME PRI KAZDEJ PRILEZITOSTI, ALE TAK, ABY NEPRERASTLA CEZ HLAVU NASEJ OSOBNOSTI. PRI TLMENI ZIACKEJ OSOBNOSTI POSTUPUJEME HUMANNE A TAK, ABY SME MALI ALIBI. MATEMATICKE ULOHY DELIME NA SPRAVNE, CO SU ULOHY, KTORE VYRIESIT VIEME, A NA NESPRAVNE, KTORE TIEZ VYRIESIT VIEME, ALE VZDY, KED ICH CHCEME RIESIT, NAM DO TOHO NIECO PRIDE. PRIPRAVA NA HODINU BY MALA OBSAHOVAT LEN ULOHY SPRAVNE. ULOHA MA UMOZNIT, ABY SME SA PRED ZIAKMI UKAZALI A NAPRAVILI SI TAK REPUTACIU POSKODENU NA MINULEJ HODINE, KED SME PRILIS NESKORO ZISTILI, ZE RIESIME ULOHU NESPRAVNU A NEBOLI SME NIKAM ODVOLANI. PRED ZADANIM ULOHY VYTVORIME V TRIEDE USMEVNE PROSTREDIE, ABY PO JEJ ZADANI MOHOL ZIAKOM USMEV NA PERACH ZMRZNUT. PO TYCHTO DOLEZITYCH PRIPRAVACH UZ ZIACI VACSINOU REZIGNUJU, A SU TAK NA RIESENIE ULOHY PRIPRAVENI. MUSIME ICH VSAK PRIPRAVIT I NA TO, ZE SA VOBEC NEPODARI ULOHU VYRIESIT. NIKDY NEPRIPUSTIME, ZE BY NEVYRIESENIE ULOHY MOHLO MAT NEJAKU SUVISLOST S NASIMI ZNALOSTAMI. NEVYRIESENIE ULOHY JE VZDY SPOSOBENE NEDOSTATKOM CASU. PRETOZE MAJU ZIACI DOMA CASU DOST, DAME IM JU ZA DOMACU ULOHU. RIESENIE ULOH ROZDELUJEME NA VLASTNE, KED ICH RIESIME VLASTNYMI SILAMI A ZAROVEN PISEME NA TABULU, A NA NEVLASTNE, KED ICH TIEZ RIESIME VLASTNYMI SILAMI, ALE ZAPIS NA TABULI JE SPROSTREDKOVANY VYVOLANYM ZIAKOM. PRI NEVLASTNOM RIESENI MOZE DOJST K TOMU, ZE ZIAK NEPOCHOPI, ZE SLUZI LEN AKO ZAPISOVATEL NASICH MATEMATICKYCH IDEI, A SNAZI SA NAM VNUTIT INY SPOSOB RIESENIA, NEZ KTORY VIEME, PRICOM JEHO SPOSOB VOBEC NEVIEME. ZIACKE RIESENIE, KTORE SA LISI OD RIESENIA NASHO, JE VZDY NEROZUMNE. ZIAKOVI, KTORY ZACAL ULOHU RIESIT INAK, NEZ SI PREDSTAVUJEME, JE NUTNE SETRNE VYSVETLIT, ZE JEHO POSTUP NIKAM NEVEDIE. AK SA ZIAK ODVAZI ULOHU RIESIT INAK, NEZ SI PREDSTAVUJEME, OKAMZITE K NEMU PRISTUPIME A NENAPADNE ZMAZAVAJUC JEHO POSTUP SA OPYTAME, CI MU NIC LEPSIE NENAPADLO. DOLEZITE UPOZORNENIE PRE ZACINAJUCICH PEDAGOGOV: OTAZKU "KTORY HLUPAK VAS TO TAKTO UCIL?" KLADIEME LEN V TOM PRIPADE, KED SME SI ISTI, ZE SME TO NEBOLI MY ANI RIADITEL SKOLY. KAZDA CHYBA, KTORU UROBIME, JE CHYBA UMYSELNA. CHYB NEUMYSLENYCH SA ZASADNE NEDOPUSTAME. VYRIESENY PRIKLAD NECHAME V TRIEDE NIEKOLKO MINUT DOZNIET, PRETOZE PREVAZNA CAST ZIAKOV VOBEC NEVIE, CO SME VLASTNE VYPOCITALI. AK VIEME DANY PRIKLAD VYRIESIT ROZNYMI SPOSOBMI, UKAZEME ICH. JEDNYM SPOSOBOM JE ZIAK DEPRIMOVANY LEN RAZ. A NA ZAVER VSEOBECNA PEDAGOGICKA ZASADA: I UCITEL MOZE BYT NA KONCI SVOJEJ KARIERY PRIJATY LUDSKOU SPOLOCNOSTOU ZA PLNOPRAVNEHO CLENA.

Je zaujímavé, že tieto úvahy vôbec nie sú exaktné (hoci intuícia v nich má racionálne jadro), a vo všeobecnosti vôbec nemusia viesť k cieľu. Sú však pekným príkladom esteticko-filozofickej zásady zvanej *Occamova britva*, podľa ktorej treba vždy najprv hľadať čo najjednoduchšie vysvetlenie.

Komentár (oprava Stano Krajči):

Úloha bola veľmi neštandardná, a preto riešiteľom (v istom zmysle oprávnene) nebolo jasné, čo všetko treba uviesť do riešenia. Rozhodne však nestačilo uviesť len odšifrovaný text, body boli udeľované podľa schopnosti sformulovať postup riešenia.

---

6 Zadanie (výber Janka Hajduková):

Každej cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zodpovedá iné písmeno. Nájdite čísla `ABACDE`, `CAFDG`, `CHHBAED`, ak viete, že predstavujú dĺžky strán nejakého trojuholníka.

Riešenie:

(Podľa Mareka Derňára.)

Keďže všetky tri čísla sú aspoň dvojciferné, ich prvá cifra nie je nula, platí teda $\mathtt{A}, \mathtt{C} \neq 0$. Majú to byť strany trojuholníka, preto pre ne musia platiť všetky tri trojuholníkové nerovnosti. Pretože tretie z nich je najväčšie (má totiž najviac cifier), stačí sa obmedziť na najsilnejšiu z nich, a to $\mathtt{ABACDE} + \mathtt{CAFDG} > \mathtt{CHHBAED}$, t. j. $(10^5\mathtt{A} + 10^4\mathtt{B} + 10^3\mathtt{A} + 10^2\mathtt{C} + 10^1\mathtt{D} + 10^0\mathtt{E}) + (10^4\mathtt{C} + 10^3\mathtt{A} + 10^2\mathtt{F} + 10^1\mathtt{D} + 10^0\mathtt{G}) > (10^6\mathtt{C} + 10^5\mathtt{H} + 10^4\mathtt{H} + 10^3\mathtt{B} + 10^2\mathtt{A} + 10^1\mathtt{E} + 10^0\mathtt{D})$, čo po úprave dáva $101900\mathtt{A} + 9000\mathtt{B} + 100\mathtt{F} + 19\mathtt{D} + \mathtt{G} > 989900\mathtt{C} + 110000\mathtt{H} + 9\mathtt{E}$.

Vzhľadom na usporiadanie koeficientov ľavá strana nerovnosti nadobúda maximum v prípade $\mathtt{A} = 9$, $\mathtt{B} = 8$, $\mathtt{F} = 7$, $\mathtt{D} = 6$ a $\mathtt{G} = 5$, a jeho hodnota je 989919. Analogicky (pamätajúc však na podmienku $\mathtt{C} \neq 0$) pravá strana nadobúda minimum v prípade $\mathtt{C} = 1$, $\mathtt{H} = 0$ a $\mathtt{E} = 2$, a jeho hodnota je 989918. Keďže ľavá strana musí byť väčšia než strana pravá, hodnotu ľavej nemožno zmenšiť a hodnotu pravej nemožno zväčšiť. A pretože pri tomto ohodnotení sú hodnoty všetkých písmen rôzne, je to jediný kandidát na riešenie našej úlohy.

Platí teda $\mathtt{A} = 9$, $\mathtt{B} = 8$, $\mathtt{C} = 1$, $\mathtt{D} = 6$, $\mathtt{E} = 2$, $\mathtt{F} = 7$, $\mathtt{G} = 5$ a $\mathtt{H} = 0$. Čísla zo zadania sú potom 989162, 19765 a 1008926, a keďže všetky tri trojuholníkové nerovnosti ($989162 + 19765 > 1008926$, $19765 + 1008926 > 989162$ a $1008926 + 989162 > 19765$) platia, je to skutočne (jediné) riešenie úlohy.

Komentár (oprava Stano Krajči):

Niektorí riešitelia prejavili svoju neistotu pri práci s nerovnicou a nahradili ju rovnicou, pričom si nie vždy uvedomili, že ich ďalšie úvahy tým môžu byť značne ovplyvnené.