KRVOPOT

1. séria, 2007/2008

Riešenia a komentáre

---

1 Zadanie:

Janko a Marienka hádžu šípom do terča, v ktorom sú len dve oblasti. Vnútorný kruh má hodnotu 11 bodov, vonkajšie medzikružie 4 body. Na terč hádžu striedavo, pričom vyhráva ten, kto presne dosiahne vopred určený počet bodov. Janko zistil, že číslo 21 sa nedá dosiahnuť. Spolu s Marienkou preto zobrali pero a papier a zisťovali, ktoré súčty sú nemožné. Zistili, že počnúc určitou hodnotu je každý väčší súčet už dosiahnuteľný. Viete určiť túto hodnotu?

Riešenie:

Označme hodnotu súčtu písmenom s, kde $s \in \mathbb{N}^+$. Rozoberieme dva prípady:

1 Ak súčet s je deliteľný číslom 4, teda ak $s = 4k$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}^+$, tak súčet s môžeme dosiahnuť napríklad tak, že trafíme k-krát 4-bodovú oblasť.

2 Ak súčet s nie je deliteľný štyrmi, tak označme S_i, kde $i \in \{1, 2, 3\}$, množinu súčtov tvaru $4k + i$, kde $k \in \mathbb{N}$, ktoré vieme dosiahnuť. Tieto množiny sú neprázdne: napr. súčet 41 z množiny S_1 dosiahneme tak, že 3-krát trafíme 11-bodovú oblasť a 2-krát 4-bodovú oblasť, súčet 42 z množiny S_2 tak, že 2-krát trafíme 11-bodovú oblasť a 5-krát 4-bodovú oblasť, a súčet 43 z množiny S_3 tak, že 1-krát trafíme 11-bodovú oblasť a 8-krát 4-bodovú oblasť. Na dosiahnutie súčtu tvaru $4k + i$, kde $i \in \{1, 2, 3\}$, potrebujeme aspoň 1-krát trafiť 11-bodovú oblasť. Ak by sme všetky súčty v každej z množín S_i usporiadali podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie, tak za sebou idúce súčty sú od seba vzdialené na číselnej osi 4 jednotky. Zo všetkých súčtov tvaru $4k+i$ zoberme najmenší súčet – označme ho s_i. Pre s_i platí, že $s_i = 11a + 4b$ (dá sa dosiahnuť trafením 11-bodovej a 4-bodovej oblasti), kde $a, b \in \mathbb{N}$ a $a \neq 0$. Keďže s_i je najmenšie číslo tvaru $11a + 4b$ z množiny S_i, tak $b = 0$. Ak by totiž $b > 0$, tak číslo $11a + 4(b - 1)$ spĺňa požadované podmienky a je menšie ako s_i, čo je spor s tým, že s_i je minimálne. Platí teda $11 \,|\, s_i$ a zároveň $4 \,|(s_i - i)$. Číslo s_i je určite menšie ako 44 (najmenší spoločný násobok 4 a 11), takže máme 3 možnosti (čísla 11, 22 a 33), z ktorých jedine číslo 33 je tvaru $4k + 1$, číslo 22 je tvaru $4k + 2$ a číslo 11 je tvaru $4k + 3$. Najväčší súčet, ktorý nevieme dosiahnuť, je teda maximum z čísel $33 - 4 = 29$, $22 - 4 = 18$ a $11 - 4 = 7$, čo je číslo 29.

Počnúc hodnotou 30 je teda každý súčet dosiahnuteľný. Najväčší súčet, ktorý nevieme dosiahnuť, je 29.

Komentár opravovateľa (Inga Semanišinová):

Zabudli ste odôvodniť, že súčet 29 sa nedá dosiahnuť (nestačí len napísať: „Nedá sa.“). Viacerí z vás napísali, že počnúc súčtom 30 sa každý súčet dá dosiahnuť, ale nijako to neodôvodnili. Z vášho riešenia sa potom nedalo vyčítať, ako viete, že napr. aj súčet 126459 sa dá dosiahnuť. U niektorých bola snaha, aspoň čo-to k tomu napísať – tí majú potom viac ako 1 bod.

Najkrajšie riešenie mal Marek Derňár.

---

2 Zadanie:

Jurko má z tvrdého papiera vystrihnuté tri štvorce so stranou $15\,\mathrm{cm}$.

a) Z každého rohu prvého štvorca odstrihol štvorček so stranou $1\,\mathrm{cm}$ a poohýnaním papiera vytvoril otvorenú škatuľku. Aký má táto škatuľka objem?

b) Z každého rohu druhého štvorca odstrihol štvorček so stranou $2\,\mathrm{cm}$ a opäť poskladal škatuľku. Má táto škatuľka väčší alebo menší objem ako tá predchádzajúca?

c) Aké veľké štvorčeky má odstrihnúť z rohov posledného štvorca, aby vzniknutá škatuľka mala maximálny možný objem?

Riešenie:

a) Ak z každého rohu štvorca so stranou $15\,\mathrm{cm}$ odstrihneme štvorček so stranou $1\,\mathrm{cm}$, poohýnaním papiera dostaneme otvorenú škatuľku so štvorcovou podstavou $13\,\mathrm{cm}\times 13\,\mathrm{cm}$ a výškou $1\,\mathrm{cm}$. Objem takejto škatuľky je $V_1 = 13\,\mathrm{cm}\cdot 13\,\mathrm{cm}\cdot 1\,\mathrm{cm} = 169\,\mathrm{cm}^3$.

b) V prípade, že z rovnako veľkého štvorca odstrihneme štvorčeky so stranou $2\,\mathrm{cm}$, dostaneme škatuľku s rozmermi $11\,\mathrm{cm}\times 11\,\mathrm{cm}\times 2\,\mathrm{cm}$, ktorá bude mať objem $V_2 = 11\,\mathrm{cm}\cdot 11\,\mathrm{cm}\cdot 2\,\mathrm{cm} = 242\,\mathrm{cm}^3$. Teda druhá škatuľka má väčší objem ako tá prvá.

c) Označme veľkosť strany odstrihovaných štvorčekov x. Keďže veľký štvorec má stranu dĺžky $15\,\mathrm{cm}$, z rohov môžeme odstrihnúť maximálne štorčeky so stranou $7,5\,\mathrm{cm}$. A teda, aby sme mohli zo zvyšku poskladať škatuľku, musí byť $0\,\mathrm{cm} < x < 7,5\,\mathrm{cm}$.

Vzniknutá škatuľka má štvorcovú podstavu so stranou $15\,\mathrm{cm} - 2x$ a výšku x. Jej objem je preto $V = (15\,\mathrm{cm} - 2x)\cdot(15\,\mathrm{cm} - 2x)\cdot x$. Chceme zistiť, pre akú hodnotu x je objem škatuľky maximálny.

Máme dve možnosti – drevorubačskú vysokoškolskú a elegentnú stredoškolskú:

1 Chceme teda zistiť, v ktorom bode $x \in (0\,\mathrm{cm}, 7,5\,\mathrm{cm})$ nadobúda funkcia $f(x) = (15\,\mathrm{cm} - 2x)\cdot(15\,\mathrm{cm} - 2x)\cdot x = 4x^3 - (60\,\mathrm{cm})x^2 + (225\,\mathrm{cm}^2)x$ svoje maximum. Na určenie extrémov potrebujeme nájsť stacionárne body, t. j. také x, že $f'(x) = 0$. V našom prípade je $f'(x) = (12\,\mathrm{cm})x^2 - (120\,\mathrm{cm}^2)x + (225\,\mathrm{cm}^3)$, a teda stacionárne body sú riešením kvadratickej rovnice $(12\,\mathrm{cm})x^2 - (120\,\mathrm{cm}^2)x + (225\,\mathrm{cm}^3) = 0$, t. j.

$$x = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4\cdot 12\cdot 225}}{24}\,\mathrm{cm} = \frac{120 \pm \sqrt{3600}}{24}\,\mathrm{cm},$$

a teda $x \in \{7,5\,\mathrm{cm}, 2,5\,\mathrm{cm}\}$. Keďže $7,5\,\mathrm{cm} \notin (0\,\mathrm{cm}, 7,5\,\mathrm{cm})$, do úvahy prichádza len $x = 2,5\,\mathrm{cm}$. Ešte overíme, že v tomto bode sa naozaj nadobúda maximum: $f''(x) = 24x - 120\,\mathrm{cm}$, takže $f''(2,5\,\mathrm{cm}) = 24\cdot 2,5\,\mathrm{cm} - 120\,\mathrm{cm} = -60\,\mathrm{cm} < 0\,\mathrm{cm}$.

2 Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (tzv. AG-nerovnosti) pre kladné hodnoty $15\,\mathrm{cm} - 2x$, $15\,\mathrm{cm} - 2x$ a $4x$ platí

$$\sqrt[3]{(15\,\mathrm{cm} - 2x)(15\,\mathrm{cm} - 2x)(4x)} \le \frac{(15\,\mathrm{cm} - 2x) + (15\,\mathrm{cm} - 2x) + (4x)}{3} = 10\,\mathrm{cm},$$

t. j. $\sqrt[3]{4V} \le 10\,\mathrm{cm}$, čiže $V \le 250\,\mathrm{cm}^3$, pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $15\,\mathrm{cm} - 2x = 15\,\mathrm{cm} - 2x = 4x$, t. j. keď $x = 2,5\,\mathrm{cm}$.

A preto, ak chceme dosiahnuť maximálny objem, musíme z rohov daného štvorca odstrihnúť štvorčeky so stranou $2,5\,\mathrm{cm}$. Vzniknutá škatuľka bude mať objem $V = 10\,\mathrm{cm}\cdot 10\,\mathrm{cm}\cdot 2,5\,\mathrm{cm} = 250\,\mathrm{cm}^3$.

Komentár opravovateľa (Janka Hajduková):

- Časť a) a b) ste vyriešili všetci správne.
- Časť c) jedna z vás neriešila vôbec a jedna predpokladala, že dĺžky strán odstrihovaných štvorčekov musia byť celočíselné. Takáto podmienka však v zadaní úlohy nebola (1 bod).
- Niektorí z vás skúšaním dospeli k hypotéze, že treba odstrihnúť $2,5\,\mathrm{cm}$. Túto svoju hypotézu však nedokázali (2 body).
- Mnohí z vás síce svoje tvrdenie dokázali, ale v dôkaze zabudli určiť podmienky pre x, následne neoverili, že to, čo im výpočtom vyšlo, sa dá aj zrealizovať, a neuviedli maximálny dosiahnuteľný objem škatuľky (4 body).

---

3 Zadanie:

Jurkov obľúbený predmet je matematika. Koľkými spôsobmi môže z tabuľky prečítať názov tohto predmetu? (Prečítať znamená vytvoriť slovo pospájaním susedných písmen po riadkoch a stĺpcoch.)

```
                  M
                M A M
              M A T A M
            M A T E T A M
          M A T E M E T A M
        M A T E M A M E T A M
      M A T E M A T A M E T A M
    M A T E M A T I T A M E T A M
  M A T E M A T I K I T A M E T A M
M A T E M A T I K A K I T A M E T A M
```

Riešenie:

Najprv si uvedomme, že do úvahy prichádzajú iba možnosti čítania začínajúce sa v niektorom M na niektorej odvesne celého trojuholníka (teda nie v žiadnom M vnútri) a končiace sa v A v strede základne (a nie v žiadnom inom). Pri inom koníčku a/alebo inej konfigurácii písmen by to platiť nemuselo...

Ukážeme tri riešenia:

1 *Binomická veta:*

Jednotlivé spôsoby prečítania slova MATEMATIKA zodpovedajú lomeným čiaram (dĺžky 9) a smerujú vždy buď dole a doprava (pri cestách začínajúcich v písmenách M ľavej strany trojuholníka) alebo dole a doľava (pri cestách začínajúcich v písmenách M pravej strany trojuholníka). Uvažujme jednu polovicu trojuholníka: Každá cesta začínajúca písmenom M v i. riadku obsahuje práve $i-1$ posunutí doprava a $10-i$ posunutí nadol. Teda pre M v i. riadku je počet možností $\binom{9}{10-i}$. Pre všetkých 10 riadkov jednej polovice tak dostávame

$$\sum_{i=1}^{10}\binom{9}{10-i} = \binom{9}{9}+\binom{9}{8}+\binom{9}{7}+\binom{9}{6}+\binom{9}{5}+\binom{9}{4}+\binom{9}{3}+\binom{9}{2}+\binom{9}{1}+\binom{9}{0} =$$

$$= (1+1)^9 = 2^9 = 512$$

možností. Pre celý trojuholník treba tento čiastkový výsledok vynásobiť číslom 2 a odrátať jednu spoločnú možnosť z najvyššieho M zvislo dole, lebo tá je započítaná v oboch poloviciach. Teda hľadaný počet všetkých možností je $512 \cdot 2 - 1 = 1023$.

2 *Kombinatorické pravidlo súčtu:*

V pôvodnej tabuľke si všimnime 19 obdĺžnikov (podľa počtu možných písmen M), ktoré majú jediné možné písmeno A v jednom rohu a v protiľahlom rohu majú niektoré z písmen M. Bližšie si vysvetlime situáciu v jednom z nich:

a	I: 1	T: 3	A: 6	M: 10	E: 15	T: 21	A: 28	M: 36
b	K: 1	I: 2	T: 3	A: 4	M: 5	E: 6	T: 7	A: 8
c	A: 1	K: 1	I: 1	T: 1	A: 1	M: 1	E: 1	T: 1
	1	2	3	4	5	6	7	8

Lomené čiary začínajú v bode A a končia v bode M. Počet možných ciest z bodu A v bunke c1 do bodu K v bunke b1 je 1, rovnako ako počet ciest do bodu K v bunke c2. Počet možných najkratších ciest z písmena A do písmena I v bunke b2 je 2, teda súčet možných ciest z bunky c1 do buniek b1 a c2. Podobne napríklad počet ciest z bunky c1 do bunky b6 je súčet ciest z bunky c1 do buniek b5 a c6. Teda počet ciest z bunky c1 do bunky a8 je súčet ciest z c1 do a7 a z c1 do b8. Rovnakým postupom zistíme počty ciest z písmena A do písmen M.

									1									
								9	1	**9**								
							36	8	1	8	**36**							
						84	28	7	1	7	28	**84**						
					126	56	21	6	1	6	21	56	**126**					
				126	70	35	15	5	1	5	15	35	70	**126**				
			84	56	35	20	10	4	1	4	10	20	35	56	**84**			
		36	28	21	15	10	6	3	1	3	6	10	15	21	28	**36**		
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**

Teraz už treba iba spočítať čísla na ramenách trojuholníka: $1+9+36+84+126+126+84+36+9+1+9+36+84+126+126+84+36+9+1 = 1023$.

3 *Zovšeobecnenie:*

Zadanú úlohu je možné vyriešiť pomocou zovšeobecnenia v závislosti od dĺžky čítaného slova.

- 1-písmenkové: $1 = 0 \cdot 2 + 1 = 2^1 - 1$,
- 2-písmenkové: $3 = 1 \cdot 2 + 1 = 2^2 - 1$,
- 3-písmenkové: $7 = 3 \cdot 2 + 1 = 2^3 - 1$,
- 4-písmenkové: $15 = 7 \cdot 2 + 1 = 2^4 - 1$,
- ...

Z týchto výsledkov by sa azda dalo vyvodiť, že pre n-písmenkové slovo budeme mať $2^n - 1$ možností, špeciálne pre naše $n = 10$ teda $2^{10} - 1 = 1023$. Takýto záver by však bol neúplný, chyba tohto typu sa nazýva neúplná matematická indukcia. Pokúsme sa ho teda odvodiť korektne.

Vyššie uvedené pravidlo kombinatorického súčtu pre políčka v pravej časti trojuholníka môžeme popísať takýmto diagramom:

x	$x+y$
	y

Inými slovami, pravá a analogicky i ľavá časť trojuholníka je vlastne „na bok položený" Pascalov trojuholník. Označme s_i súčet prvkov v jeho i. hladine. Zistíme, aký je vzťah medzi s_n a s_{n+1}, t. j. medzi súčtami prvkov v jeho susedných hladinách n a $(n+1)$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & \dots & & a_{n-2} & & a_{n-1} & & a_n & \\ b_0 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & & \dots & & & b_{n-1} & & b_n & & b_{n+1} \end{array}$$

Podľa spomínaného pravidla máme vzťahy:

$b_1 = a_0 + a_1,$
$b_2 = a_1 + a_2,$
$b_3 = a_2 + a_3,$
$\dots$
$b_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-1},$
$b_n = a_{n-1} + a_n.$

Navyše zrejme $a_0 = a_n = b_0 = b_{n+1} = 1$. Pre súčet prvkov $(n+1)$. hladiny teda platí:

$s_{n+1} =$
$= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n + b_{n+1} =$
$= 1 + (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_{n-2} + a_{n-1}) + (a_{n-1} + a_n) + 1 =$
$= 1 + a_0 + (a_1 + a_1) + (a_2 + a_2) + \dots + (a_{n-1} + a_{n-1}) + a_n + 1 =$
$= (a + 0 + a_0) + (a_1 + (a_1) + (a_2 + (a_2) + \dots + (a_{n-1} + a_{n-1}) + (a_n + a_n) =$
$= 2(a + 0 + a_1 + a_2 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) =$
$= 2s_n.$

Teraz sa už indukciou ľahko presvedčíme, že pre každé $n \geq 1$ platí $s_n = 2^{n-1}$: Vzťah $s_1 = 1 = 2^0$ je zrejmý a podľa prechádzajúceho vzťahu a indukčného predpokladu je $s_{n+1} = 2s_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

V našom príklade potrebujeme dve n. hladiny (vľavo a vpravo) s jedným spoločným prvkom 1 (na vrchole trojuholníka). Hľadaný súčet je teda naozaj $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Komentár opravovateľa (Ivka Kovárová):

V odovzdaných riešeniach sa našli všetky uvádzané riešenia, ktoré boli vždy správne dotiahnuté do konca. Našlo sa i jedno riešenie pomocou systému vypisovania možností, tento spôsob by však bol použiteľný pri kratších slovách, nájsť vhodný systém vypisovania pre cesty dĺžky 9 je veľmi náročné a i v takom prípade je veľmi ťažké sa nepomýliť.

---

4 Zadanie:

Ignác a Igor sú dvojčatá a obaja chodia na akvaristický krúžok. Priemerný vek detí, ktoré chodia na tento krúžok, je presne $14,8$ roka. Bez nich dvoch je priemerný vek detí už presne $15,4$ roka. Koľko detí chodí na akvaristický krúžok?

Riešenie:

Uvedieme dve riešenia:

1 (Podľa Mareka Derňára.)

Označme x vek (v rokoch) Igora aj Ignáca (pripomeňme, že sú to dvojčatá), a d počet a y súčet vekov (v rokoch) všetkých členov krúžku (včítane našich dvojčiat). Zo zadania máme vzťahy $\frac{y}{d} = 14,8$ a $\frac{y-2x}{d-2} = 15,4$ (z počtu v menovateli sme odrátali Igora a Ignáca a v čitateli sme odrátali ich dva veky). Úpravou tejto sústavy dostávame rovnicu $3d = 154 - 10x$ (je rozumné, aby koeficienty boli celé čísla).

Zrejme $d \in \mathbb{N}$ (je to počet detí), podmienka $x \in \mathbb{N}$ je diskutabilná. Najprv však predpokladajme, že je splnená (je to doslova prirodzená možnosť :-)), rovnica $3d = 154 - 10x$ je teda diofantická. Jej ľavá strana je deliteľná troma, taká preto musí byť aj jej pravá strana. Avšak $154 - 10x = -(10x - 154) = -((9x - 153) + (x - 1)) = -3 \cdot (3x + 51) + (1 - x)$, takže aj číslo $1 - x$ musí byť deliteľné troma. To však znamená, že pre nejaké celé k platí $x - 1 = 3k$, t. j. $x = 3k + 1$, z čoho vidieť, že k musí byť dokonca prirodzené. Dosadením do vzťahu $3d = 154 - 10x$ po úprave dostávame $d = 48 - 10k$. Aby boli d aj k prirodzené, máme iba niekoľko potenciálnych riešení:

k	0	1	2	3	4
$d = 48 - k$	48	38	28	18	8
$x = 3k + 1$	1	4	7	10	13

Zdanlivo by sme tu mohli riešenie ukončiť (s malou spochybňujúcou diskusiou o možnosti krúžkovej činnosti ročných (prípadne i štvorročných) detí). Ak však chceme byť konzistentní, pri predpoklade, že vek x je celé číslo, musíme rovnaký predpoklad urobiť i pri čísle y (je to súčet vekov). Teraz už však tabuľka vyzerá horšie:

k	0	1	2	3	4
$d = 48 - k$	48	38	28	18	8
$x = 3k + 1$	1	4	7	10	13
$y = 14,8d$	$710,4$	$562,4$	$414,4$	$266,4$	$118,4$

Za predpokladov prirodzenosti veku teda úloha nemá riešenie!

Ak od tohoto predpokladu pri x i y ustúpime (pre d je zrejme neoddiskutovateľný), máme sústavu rovníc $x = 15,4 - 0,3d$ a $y = 14,8d$. Číslo x síce nemusí byť prirodzené, ale musí byť kladné, t. j. $15,4 - 0,3d > 0$, z čoho $d \leq 51$. Zrejmá je aj podmienka $d \geq 3$ (okrem I+I musí byť v krúžku ešte aspoň jeden člen, inak by sme nemohli dostať priemerný vek zvyšných členov). Možnými počtami detí v krúžku sú teda prirodzené čísla d z intervalu $[3, 51]$.

V úplne správnom riešení by sme ešte mali urobiť skúšku, t. j. ukázať, že pre každý taký počet d situácia môže nastať. Ako uvidíme, stačí uvažovať, že všetci ostatní $d-2$ členovia majú rovnaký vek, a to tých $15,4$ (taký je priemer ich vekov), a Igor a Ignác majú po $15,4-0,3d$ rokov. Potom totiž pre priemer ich vekov naozaj platí $\frac{(d-2)15,4+2(15,4-0,3d)}{d} = 14,6$.

2 (Podľa Ladislava Mikeša.)

Označme teraz počet ostatných detí c (t. j. pri porovnaní s minulým označením $c = d - 2$) a súčet ich vekov a (t. j. $a = y - 2x$), rovnaký vek Ignáca a Igora bude opäť x. Prepokladáme pritom, že c, a i x sú kladné prirodzené čísla. Zo zadania máme vzťahy $\frac{(}{a} + 2x)(c + 2) = 14,8$ a $\frac{a}{c} = 15,4$. Prvý vzťah upravme na tvar $5(a + 2x) = 74(c + 2)$, druhý na $5a = 77c$. Z druhého vzťahu vyplýva, že $5 \mid c$, teda $c = 5n$ pre nejaké kladné prirodzené n. Po dosadení do prvého vzťahu však dostávame $5(a + 2x) = 74 \cdot 5n + 148$, t. j. $5(a + 2x - 74n) = 148$. To však znamená, že $5 \mid 148$, čo je spor. Úloha teda (za predpokladu prirodzenosti veku) nemá riešenie.

Komentár opravovateľa (Stano Krajči):

Za úplne správne riešenia mohli byť uznané jednak tie, ktoré uvažovali predpoklad prirodzenosti vekov, jednak tie, ktoré tento predpoklad neuvažovali – dôležitá bola hlavne vnútorná konzistencia riešenia (t. j. ak prirodzenosť veku predpokladáme u dvojčiat, musíme ju predpokladať i pri vekoch ostatných členov krúžku). V druhom prípade nikto neurobil skúšku, za to však (tentoraz) body strhuté neboli.

---

5 Zadanie:

Rybári vylovili 137 rýb, označili ich a vrátili späť do rybníka. Druhý deň vylovili 202 rýb a medzi nimi bolo 12 označených. Koľko rýb je v rybníku?

Riešenie:

Najprv motivácia: Predstavme si, že by sme mali spočítať, aspoň približne, koľko rýb pláva v určitom rybníku. Takúto otázku si kladú rybári pri plánovaní výlovu. Podobne aj biológovia potrebujú vedieť pri svojich výskumoch, koľko živočíchov určitého druhu žije na nimi skúmanom území. Samozrejme, nemožno vypustiť rybník a spočítať ryby kvôli nejakému plánovaniu, takisto nie je v našich silách pochytať všetkých živočíchov žijúcich na danom území a stanoviť ich počty.

V praxi sa počty rýb odhadujú približne takto: Vyloví sa väčší počet rýb, spočítajú sa, každá ryba sa nejako označí (napr. do plutiev sa urobí dierka) a vráti sa späť do rybníka. Potom sa počká, kým sa označené i neoznačené ryby pod hladinou dobre premiešajú a znovu sa vyloví určité množstvo rýb. Medzi vylovenými rybami budú označené i neoznačené. Z ich počtu sa dá odhadnúť, koľko rýb je v rybníku.

Pri riešení úlohy predpokladáme, že:

- počas jedného dňa nezaznamenáme zvýšený úhyn ani rozmnožovanie rýb,
- ryby sa počas jedného dňa dostatočne premiešajú,
- môžeme ich vyloviť v druhý deň, nie sú ostražitejšie ako v deň prvý

Prepíšme si v bodoch zadanie úlohy:

- Z celkového počtu rýb je označených 137 rýb.
- Z vylovených 202 (v druhý deň) je označených 12 rýb.

Teda pomer označených rýb k počtu rýb v celom rybníku sa rovná pomeru označených rýb vylovených v daný deň k počtu vylovených rýb v tento deň, t. j. $\frac{12}{202} = \frac{137}{x}$. Riešením rovnice je číslo 2306, v rybníku je teda (za vyššie uvedených predpokladov) 2306 rýb.

Komentár opravovateľa (Janka Mihalčová):

Väčšina riešení mala vyššie popísanú myšlienku, no našli sa dvaja riešitelia, ktorí si túto úlohu príliš zjednodušili. Z predchádzajúcich úvah je asi zrejmé, že určenie len dolného odhadu počtu rýb v rybníku nestačí!

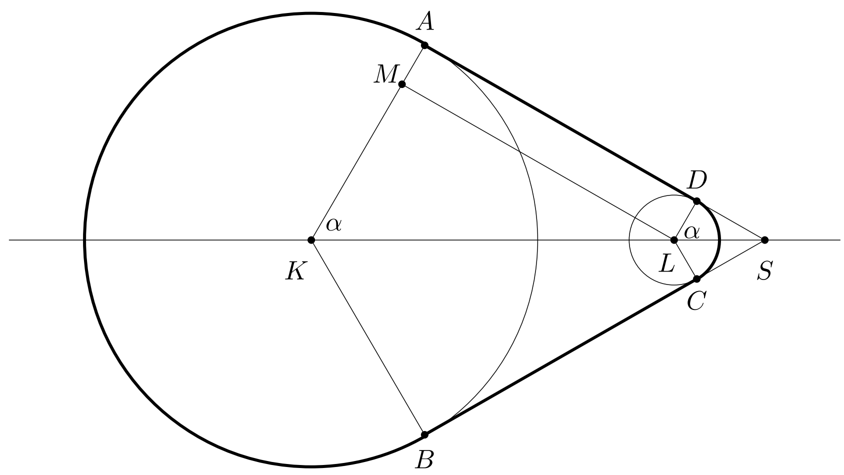
---

6 Zadanie:

Peťo a Janka sa vybrali autom na dovolenku k moru. Lenže cestou sa im pokazilo auto – roztrhol sa im klinový remeň. Náhradný remeň nemali, a tak im napadlo na omotanie okolo remeníc použiť Jankine pančuchy. Remenice majú priemery $30\,\mathrm{cm}$ a $6\,\mathrm{cm}$ a ich hriadele sú od seba vzdialené $24\,\mathrm{cm}$. Podarí sa im nahradiť klinový remeň pančuchami, ak ich celková dĺžka (už po natiahnutí) je $1,5\,\mathrm{m}$, pričom na uzlík potrebujeme minimálne $15\,\mathrm{cm}$ z oboch strán?

Riešenie:

Označme K a L stredy kružníc, A, B, C a D dotykové body remeňa s oboma kružnicami S priesečník dotykových priamok $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, zrejme sú body K, L a S kolineárne. Označme ešte M taký bod, že $LDAM$ je obdĺžnik.



Aby sme zistili, či Jankine pančuchy budú stačiť ako náhrada klinového remeňa, potrebujeme určiť jeho dĺžku. Jej výpočet rozdelíme na tri časti:

1 Výpočet dĺžok úsečiek BC a DA:

Uvedomme si, že tieto úsečky AD a BC sú zhodné, stačí preto určiť dĺžku jednej z nich. Priamky $\overleftrightarrow{AK}$ a $\overleftrightarrow{DL}$ sú rovnobežky (v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom $\frac{|SK|}{|SL|}$ sa úsečka DL zobrazí na úsečku AK). Ďalej platí: $|\sphericalangle AKS| = |\sphericalangle DLS| = \alpha$, tieto uhly sú súhlasné. Zrejme $|MA| = |LD|$, z čoho vyplýva, že $|KM| = |KA| - |MA| = |KA| - |LD| = \frac{1}{2} \cdot 30\,\mathrm{cm} - \frac{1}{2} \cdot 6\,\mathrm{cm} = 12\,\mathrm{cm}$. Zo zadania vieme, že $|KL| = 24\,\mathrm{cm}$, takže $\cos(\alpha) = \frac{|KM|}{|KL|} = \frac{1}{2}$, a teda $\alpha = 60°$. Keďže $\sphericalangle KML$ je pravý, platí $|BC| = |DA| = |LM| = |KL| \cdot \sin 60° = 24\,\mathrm{cm} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. (Iná možnosť výpočtu dĺžky úsečky KL je z Pytagorovej vety v $\triangle KLM$, v ktorom už poznáme obe zvyšné strany.)

2 Výpočet dĺžky kružnicového oblúka AB:

Uhol, ktorý prislúchajúcemu danému kružnicovému oblúku, je $360° - 2\alpha = 240°$, dĺžka oblúka AB je teda $\frac{4}{3}\pi|KA| = 20\pi\,\mathrm{cm}$.

3 Výpočet dĺžky kružnicového oblúka CD:

Veľkosť uhla prisluchajúcemu kružnicovému oblúku je $2\alpha = 120°$, dĺžky oblúka CD je teda $\frac{2}{3}\pi|LD| = 2\pi\,\mathrm{cm}$.

Celková dĺžka klinového remeňa je teda $2 \cdot (12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}) + 22\pi\,\mathrm{cm} \leq 110,7\,\mathrm{cm}$. Jankine pančuchy preto budú stačiť ako jeho náhrada aj po pripočítaní $30\,\mathrm{cm}$ potrebných na uzlík.

Komentár opravovateľa (Marián Buxár):

Traja študenti vypočítali úlohu nesprávne. Chybu mali už vo svojom náčrte a následne v ďalšom postupe. Ich problémom bolo určenie bodov, v ktorých sa klinový remeň dotýka príslušných remeníc. Vo všetkých troch prípadoch študenti určili body, ktoré vytvorením priamky so stredom remeníc dávali priamku kolmú na os remeníc. Lenže to nie je pravda, lebo to by museli mať remenice rovnaký priemer.