

KRVOPOT

4. séria 2004/2005

- 1 V kruhu sedí niekoľko mužov. Každý ma dvoch susedov a pri sebe isté množstvo korún. Označme mužov v smere sprava doľava: prvý muž, druhý muž, tretí muž, . . . , pričom prvý z nich má o jednu korunu viac ako druhý, druhý o jednu korunu viac ako tretí, atď. Prvý muž dá jednu korunu druhému, ten dá dve koruny tretiemu, . . . , t. j. každý muž dá nasledujúcemu vždy o jednu korunu viac, ako dostane. Podľa tohto pravidla pokračujú tak dlho, ako je to možné. Nakoniec je medzi mužmi dvojica susedov, z ktorých má jeden 4-krát viac korún ako druhý. Koľko mužov sedí v kruhu a koľko korún mal na začiatku najchudobnejší z nich?
- 2 Do tabuľky na obrázku vpíšte navzájom rôzne prirodzené čísla tak, aby súčin čísel v každom riadku, v každom stĺpci a na oboch diagonálach bol 1000 a zároveň aby súčet čísel v prvom riadku a v prvom stĺpci bol čo najväčší.

- 3 Určte všetky dvojice prvočísel (p, q) také, že $p > q$ a číslo $p^2 - q^2$ má najviac štyroch deliteľov.
- 4 Hod mincou (nie je podstatné, kto hádže) sa bude opakovať tak dlho, až kým nepadne za sebou postupnosť znak-číslo-číslo – vtedy vyhráva hráč A – alebo postupnosť číslo-číslo-znak – vtedy vyhráva hráč B . Je táto hra spravodlivá?
- 5 Na štvorčekovanom papieri sa vyznačí obdĺžnik $m \times n$. Dvaja hráči potom striedavo zafarbiajú jeho políčka nasledujúcim spôsobom: Hráč na ťahu si zvolí niektoré ešte nezafarbené políčko a zafarbí ho spolu so všetkými políčkami, ktoré sa nachádzajú napravo alebo vyššie od neho (t. j. zafarbí obdĺžnik, v ktorého ľavom dolnom rohu je zvolené políčko a pravý horný roh je totožný s pravým horným rohom pôvodného obdĺžnika). Prehráva hráč, ktorý je donútený zafarbiť ľavé dolné rohové políčko základného obdĺžnika. Dokážte, že v tejto hre má vyhrávajúcu stratégiu začínajúci hráč. (Stratégiu nie je nutné opísať.)
- 6 V rovine je daná priamka p a kružnica k . Zostrojte taký trojuholník ABC , aby k bola kružnicou jemu vpísanou, aby jej stred ležal v jednej štvrtine jeho ťažnice na stranu AB a aby vrchol C ležal na priamke p . Urobte diskusiu o počte riešení v závislosti na vzájomnej polohe priamky p a kružnice k .

Riešenia úloh treba odovzdať do pondelka **2.5.2005** I. Semanišinovej alebo S. Krajčímu.

Podrobné informácie o KRVOPOT-e sú na stránke
<http://ics.upjs.sk/~krajci/skola/ine/Krvopot/Krvopot.html>.