DERBY

2. kolo, 2023/2024

8. 4. 2024

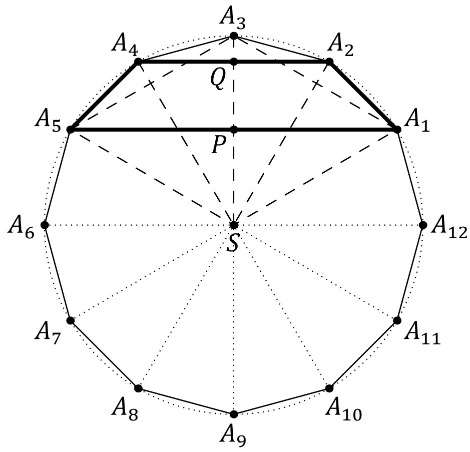
1 Zadanie:

Nech $A_1 \dots A_{12}$ je pravidelný dvanásťuholník vpísaný do kružnice s polomerom 10. Vypočítajte obsah lichobežníka $A_1A_2A_4A_5$.

Zdroj: MO, 38. ročník, úloha C-II-3

Riešenie:

Nech S je stred kružnice opísanej dvanásťuholníka. a P a Q päty kolmíc z bodu S na úsečky A_1A_5, resp. A_2A_4. Polomer opísanej kružnice označme r, podľa zadania $r = 10$.



Keďže trojuholník A_2SA_4 je rovnoramenný a $|\sphericalangle A_2SA_4| = 2 \cdot \frac{360°}{12} = 60°$, je rovnostranný. Analogicky sú rovnostranné trojuholníky A_1SA_3 a A_3SA_5. Bod P je ich spoločná päta výšok na ich spoločnú stranu SA_3.

Preto $|A_2A_4| = r$,

$$|A_1A_5| = |A_1P| + |A_5P| = \frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}r$$

a

$$|PQ| = |SQ| - |SP| = \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}r,$$

takže

$$\begin{aligned} S(A_1A_2A_4A_5) &= \frac{1}{2} \cdot (|A_1A_5| + |A_2A_4|) \cdot |PQ| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3}r + r\right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}r = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) r \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}r \\ &= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}r^2 = \frac{3-1}{4}r^2 = \frac{2}{4}r^2 = \frac{1}{2}r^2, \end{aligned}$$

a teda

$$S(A_1A_2A_4A_5) = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50.$$

---

2 Zadanie:

Nájdite všetky trojice reálnych čísel (a, b, c), kde $c \neq 0$, také, že ak $x, y \in \{0, 1, 2\}$, tak $ax + by + cxy \in \{0, 1, 2\}$.

Zdroj: MO, 37. ročník, úloha C-I-1

Riešenie:

Nech (a, b, c) vyhovuje podmienkam úlohy. Potom

$$a = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 \cdot 0 \in \{0, 1, 2\},$$

ale tiež

$$2a = a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 2 \cdot 0 \in \{0, 1, 2\},$$

takže $a \in \{0, 1\}$. Analogicky $b \in \{0, 1\}$.

Rozoberme prípady:

- Nech $a = 0$ a $b = 0$.
  Potom
  $$c = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 1 \in \{0, 1, 2\}$$
  a
  $$4c = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + c \cdot 2 \cdot 2 = a \cdot 2 + b \cdot 2 + c \cdot 2 \cdot 2 \in \{0, 1, 2\},$$
  z čoho $c \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$. Zhrnutím $c = 0$, čo je však spor.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $a = 0$ a $b = 1$.
  Potom
  $$1 + c = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 1 \in \{0, 1, 2\},$$
  z čoho $c \in \{-1, 0, 1\}$, a
  $$2 + 4c = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + c \cdot 2 \cdot 2 = a \cdot 2 + b \cdot 2 + c \cdot 2 \cdot 2 \in \{0, 1, 2\},$$
  z čoho $4c \in \{-2, -1, 0\}$, t. j. $c \in \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0\}$. Zhrnutím $c = 0$, čo je však spor.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $a = 1$ a $b = 1$.
  Potom
  $$2 + c = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 1 \in \{0, 1, 2\},$$
  z čoho $c \in \{-2, -1, 0\}$, a
  $$3 + 2c = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + c \cdot 1 \cdot 2 = a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 1 \cdot 2 \in \{0, 1, 2\},$$
  z čoho $2c \in \{-3, -2, -1\}$, t. j. $c \in \{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}\}$. Zhrnutím $c = -1$.
  Overíme, že trojica $(1, 1, -1)$ vyhovuje. Keďže $0 \leq x \leq 2$ a $0 \leq y \leq 2$, platí $-1 \leq x - 1 \leq 1$ a $-1 \leq y \leq 1$, t. j. $-1 \leq (x-1)(y-1) \leq 1$, Preto
  $$ax + by + cxy = x + y - xy = 1 - (xy - x - y + 1) = 1 - (x-1)(y-1) \in \{0, 1, 2\}.$$

Jedinou vyhovujúcou trojicou je teda $(1, 1, -1)$.

---

3 Zadanie:

Nájdite najmenšie číslo ε také, že ak je trojuholník s uhlami α, β, γ ostrouhlý, tak existuje rovnoramenný alebo pravouhlý trojuholník s uhlami κ, λ, μ taký, že $|\alpha - \kappa| \leq \varepsilon$, $|\beta - \lambda| \leq \varepsilon$, $|\gamma - \mu| \leq \varepsilon$.

Zdroj: MO, 39. ročník, úloha A-II-3

Riešenie:

Zrejme je každé vyhovujúce ε nezáporné. Bez ujmy na všeobecnosti $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Ukážeme, že číslo ε nevyhovuje, práve vtedy, keď $\varepsilon < 10°$:

→ Nech číslo ε nevyhovuje, t. j. neexistuje rovnoramenný ani pravouhlý trojuholník s uhlami κ, λ, μ taký, že $|\alpha - \kappa| \leq \varepsilon$, $|\beta - \lambda| \leq \varepsilon$, $|\gamma - \mu| \leq \varepsilon$, t. j. že zmenou každého z uhlov α, β, γ najviac o ε nemožno dostať rovnoramenný ani pravouhlý trojuholník. Platí teda:

- $\alpha < \beta - 2\varepsilon$, lebo inak by existoval pravouhlý trojuholník s uhlami $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$, γ, pričom by platilo:
  - $\left|\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| = \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = \frac{\beta-\alpha}{2} \leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$
  - $\left|\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| = \left|\frac{\beta-\alpha}{2}\right| = \frac{\beta-\alpha}{2} \leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$

    - $|\gamma - \gamma| = |0°| = 0° \leq \varepsilon$.
- $\beta < \gamma - 2\varepsilon$, lebo inak by existoval pravouhlý trojuholník s uhlami α, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, pričom by platilo:
    - $|\alpha - \alpha| = |0°| = 0° \leq \varepsilon$,
    - $\left|\beta - \frac{\beta+\gamma}{2}\right| = \left|\frac{\beta-\gamma}{2}\right| = \frac{\gamma-\beta}{2} \leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
    - $\left|\gamma - \frac{\beta+\gamma}{2}\right| = \left|\frac{\gamma-\beta}{2}\right| = \frac{\gamma-\beta}{2} \leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
- $\gamma < 90° - \varepsilon$, lebo inak by existoval pravouhlý trojuholník s uhlami α, $90° - \alpha$, $90°$, pričom by platilo:
    - $|\alpha - \alpha| = |0°| = 0° \leq \varepsilon$,
    - $\left|\beta - (90° - \alpha)\right| = |\alpha + \beta - 90°| = |180° - \gamma - 90°| = |90° - \gamma| = 90° - \gamma \leq \varepsilon$,
    - $|\gamma - 90°| = 90° - \gamma \leq \varepsilon$.

Z toho vyplýva

$$180° = \alpha + \beta + \gamma < (\beta - 2\varepsilon) + \beta + \gamma = 2\beta + \gamma - 2\epsilon < 2(\gamma - 2\varepsilon) + \gamma - 2\varepsilon$$

$$= 2\gamma - 4\varepsilon + \gamma - 2\varepsilon = 3\gamma - 6\varepsilon < 3(90° - \varepsilon) - 6\varepsilon < 270° - 3\varepsilon - 6\varepsilon < 270° - 9\varepsilon,$$

takže

$$9\varepsilon < 90°,$$

$$\varepsilon < 10°.$$

$\leftarrow$ Nech $\varepsilon < 10°$, ukážeme, že táto hodnota nevyhovuje. Majme ostrouhlý trojuholník s uhlami veľkostí 40°, 60°, 80°. Nech κ, λ, μ sú veľkosti uhlov (trojuholníka) také, že $|40° - \kappa| \leq \varepsilon$, $|60° - \lambda| \leq \varepsilon$, $|80° - \mu| \leq \varepsilon$. Potom platí:

- $\kappa \in [40° - \varepsilon, 40° + \varepsilon] \subseteq (40° - 10°, 40° + 10°) = (30°, 50°)$,
- $\lambda \in [60° - \varepsilon, 60° + \varepsilon] \subseteq (60° - 10°, 60° + 10°) = (50°, 70°)$,
- $\mu \in [80° - \varepsilon, 80° + \varepsilon] \subseteq (80° - 10°, 80° + 10°) = (70°, 90°)$.

Trojuholník s uhlami veľkostí κ, λ, μ teda nie je ani rovnoramenný ani pravouhlý.

To teda znamená, že číslo ε vyhovuje práve vtedy, keď $\varepsilon \geq 10°$. Hľadaná najmenšia hodnota je teda 10°.

---

4 Zadanie:

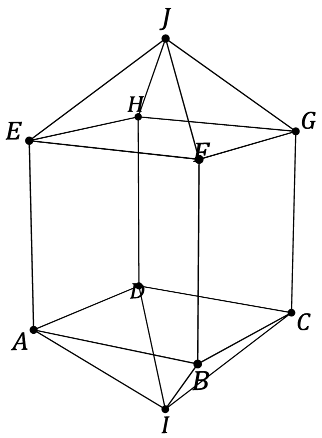
Určte najmenšie prirodzené číslo n také, že existuje konvexný mnohosten s n hranami, ktorý má aspoň 10 vrcholov a každé jeho dva rôzne vrcholy je možné po hranách spojiť aspoň 4 rôznymi cestami, z ktorých žiadne dve už nemajú ďalší spoločný vrchol.

Zdroj: MO, 39. ročník, úloha A-I-1

Riešenie:

Majme ľubovoľný vyhovujúci mnohosten. Podľa zadania vychádzajú z každého vrchola aspoň 4 hrany, a keďže každá spája 2 vrcholy, je ich aspoň $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10$ čiže 20. Platí teda $n \geq 10$.

Ukážeme, že $n \leq 10$: Nech $IABCDEFGHJ$ je teleso také, že $ABCDEFGH$ je jednotková kocka, a $ABCDI$ a $EFGHJ$ sú pravidelné štvorboké ihlany, ktoré majú výšky dĺžky $\frac{1}{2}$ a majú s kockou disjunktné vnútra:



Vzhľadom na symetrie tohto útvaru stačí podmienku zo zadania overiť pre také dvojice vrcholov, že prvý vrchol je A a druhý je z množiny $\{B, C, E, F, G, I, J\}$, a pre dvojicu (I, J):

- (A, B):
  - $A \to B$,
  - $A \to I \to B$,
  - $A \to D \to C \to B$,
  - $A \to E \to F \to B$;
- (A, C):
  - $A \to B \to C$,
  - $A \to D \to C$,
  - $A \to I \to C$,
  - $A \to E \to J \to G \to C$;
- (A, E):
  - $A \to E$,
  - $A \to B \to F \to E$,
  - $A \to D \to H \to E$,
  - $A \to I \to C \to G \to J \to E$;
- (A, F):
  - $A \to B \to F$,
  - $A \to E \to F$,
  - $A \to I \to C \to G \to F$,
  - $A \to D \to H \to J \to F$;
- (A, G):
  - $A \to I \to C \to G$,
  - $A \to B \to F \to G$,
  - $A \to D \to H \to G$,
  - $A \to E \to J \to G$;
- (A, I):
  - $A \to I$,
  - $A \to B \to I$,
  - $A \to D \to I$,
  - $A \to E \to J \to G \to C \to I$;
- (A, J):
  - $A \to E \to J$,
  - $A \to B \to F \to J$,
  - $A \to D \to H \to J$,
  - $A \to I \to C \to G \to J$;
- (I, J):
  - $I \to A \to E \to J$,
  - $I \to B \to F \to J$,
  - $I \to C \to G \to J$,
  - $I \to D \to H \to J$.

Hľadané číslo n je teda 20.
