DERBY

1. kolo, 2023/2024

30. 11. 2023

1 Zadanie:

Zistite počet všetkých usporiadaných trojíc prirodzených čísel (x, y, z), ktoré vyhovujú rovnici

$$xyz = 1\,000\,000.$$

Zdroj: MO, 28. ročník, úloha C-I-2

Riešenie:

Keďže x, y, z sú delitele $1\,000\,000$ a $1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$, existujú čísla $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ z $\{0, \dots, 6\}$ také, že $x = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$, $y = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$, $z = 2^{c_2} \cdot 5^{c_2}$. Potom ekvivalentne

$$\left(2^{a_1} \cdot 5^{a_2}\right)\left(2^{b_1} \cdot 5^{b_2}\right)\left(2^{c_1} \cdot 5^{c_2}\right) = 1\,000\,000,$$

$$2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 5^{a_2+b_2+c_2} = 2^6 \cdot 5^6,$$

čo je ekvivalentné s dvojicou rovníc

$$a_1 + b_1 + c_1 = 6,$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 6.$$

Nech $i \in \{1, 2\}$. Potom $a + i + b_i \leq 6$, takže ekvivalentne $b_i \in \{0, \dots, 6 - a_i\}$, pre každú hodnotu a_i z $\{0, \dots, 6\}$ teda existuje teda práve $7 - a_i$ vyhovujúcich hodnôt b_i z $\{0, \dots, 6\}$ a ku každej takej dvojici (a_i, b_i) existuje jediné vyhovujúce c_i z $\{0, \dots, 6\}$ také, že $a_i + b_i + c_i = 6$. Existuje teda práve $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0$ čiže 28 dvojíc (a_i, b_i, c_i) takých, že $a_i, b_i, c_i \in \{0, \dots, 6\}$ takých, že $a_i + b_i + c_i = 6$.

Výber dvojíc (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) je nezávislý, existuje teda $28 \cdot 28$ čiže 784 trojíc (x, y, z) vyhovujúcich rovnici zo zadania.

---

2 Zadanie:

Určte počet úsečiek spájajúcich vrcholy pravidelného 33-uholníka $A_1A_2 \dots A_{33}$, ktoré majú aspoň jeden spoločný bod s trojuholníkom $A_{11}A_{22}A_{33}$.

Zdroj: MO, 29. ročník, Z-II-3

Riešenie 1:

Z každého z 3 vrcholov trojuholníka $A_{11}A_{22}A_{33}$ vychádza $33 - 1$ čiže 32 úsečiek, každá z nich má s $A_{11}A_{22}A_{33}$ aspoň jeden spoločný bod (a to tento vrchol).

Body A_{11}, A_{22}, A_{33} rozdelia kružnicu opísanú tomuto 33-uholníku na 3 oblúky, vnútri každého z nich leží skupina 10 zvyšných vrcholov. Z každého z týchto $33 - 3$ čiže 30 vrcholov tak vychádza $33 - 10$ čiže 23 úsečiek, ktoré majú aspoň jeden spoločný bod s trojuholníkom $A_{11}A_{22}A_{33}$.

Keďže každú úsečku sme počítali 2-krát, hľadaný počet úsečiek je $\frac{1}{2}(3 \cdot 32 + 30 \cdot 23)$, čo je 393.

Riešenie 2:

Celkový počet úsečiek je $\frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 32$ čiže 528.

Body A_{11}, A_{22}, A_{33} rozdelia kružnicu opísanú tomuto 33-uholníku na 3 oblúky, vnútri každého z nich leží skupina 10 zvyšných vrcholov. Každá úsečka, ktorá s trojuholníkom $A_{11}A_{22}A_{33}$ nemá spoločný bod, má tak krajné body v tej istej skupine. V každej z týchto skupín je $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9$ čiže 45 úsečiek, takže spolu ich je $3 \cdot 45$ čiže 135.

Hľadan počet úsečiek je teda $528 - 135$ čiže 393.

Riešenie 3:

Rozoberme prípady:

- Nech má úsečka oba krajné body vo vrcholoch $A_{11}A_{22}A_{33}$.
  Takáto úsečka zrejme vyhovuje. Sú 3, a to strany $A_{11}A_{22}A_{33}$.

- Nech má úsečka práve jeden krajný bod vo vrcholoch $A_{11}A_{22}A_{33}$.

  Takáto úsečka zrejme vyhovuje. Každý vrchol $A_{11}A_{22}A_{33}$ je krajným bodom $33 - 3$ čiže 30 vrcholov, je ich teda $3 \cdot 30$ čiže 90.
- Nech nemá úsečka ani jeden krajný bod vo vrcholoch $A_{11}A_{22}A_{33}$.

  Body A_{11}, A_{22}, A_{33} rozdelia kružnicu opísanú tomuto 33-uholníku na 3 oblúky, vnútri každého z nich leží skuoina 10 zvyšných vrcholov. Oba krajné body teda ležia v iných z týchto 3 skupín vrcholov. Pre každú z 3 dvojíc týchto skupín tak existuje $10 \cdot 10$ čiže 100 úsečiek, čo je spolu $3 \cdot 100$ čiže 300.

Zhrnutím dostávame, že hľadaných úsečiek je $3 + 90 + 300$ čiže 393.

---

3 Zadanie:

Nech ABC je trojuholník ABC a p priamka, ktorá neprechádza žiadnym jeho vnútorným bodom. Dokážte, že súčet vzdialeností bodov A, B, C od priamky p sa rovná súčtu vzdialeností stredov strán AB, BC, CA od priamky p.

Zdroj: MO, 29. ročník, C-I-1

Riešenie:

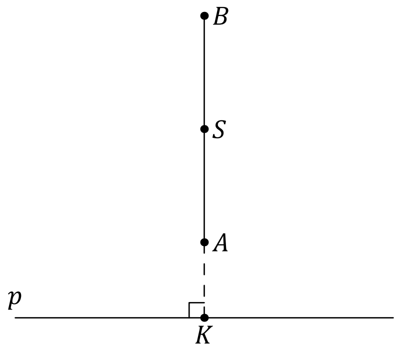
Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

- Nech p je priamka a AB je úsečka so stredom S v tej istej polrovine určenej priamkou p. Potom

$$|S,p| = \frac{1}{2}(|A,p| + |B,p|).$$

  - Rozoberme prípady:
    - Nech AB je kolmá na P.

      Nech K je spoločná päta kolmice z bodov A, S, B na priamku p. Bez ujmy na všeobecnosti $|KA| < |KB|$.

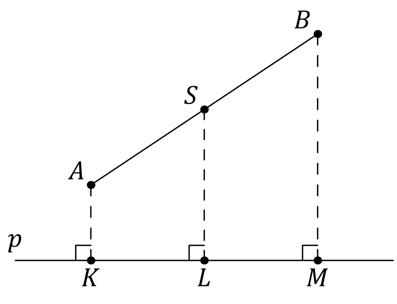


      Potom platí

$$|S,p| = |SK| = \frac{1}{2} \cdot 2\,|SK| = \frac{1}{2} \cdot 2\,((|SK| - |SA|) + (|SK| + |SA|))$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\,((|SK| - |SA|) + (|SK| + |SB|)) = \frac{1}{2} \cdot (|AK| + |BK|) = \frac{1}{2} \cdot (|A,p| + |B,p|).$$

    - Nech AB nie je kolmá na P.

      Nech K, L, M sú postupne päty kolmíc z bodov A, S, B na priamku p.



      Potom SL je stredná priečka lichobežníka $AKMB$, takže

$$|SL| = \frac{1}{2}(|AK| + |BM|),$$

čiže

$$|S,p| = \frac{1}{2}(|A,p| + |B,p|).$$

Stredy strán AB, BC, CA označme postupne D, E, F. Potom platí

$$|D,p| + |E,p| + |F,p| = \frac{1}{2}(|A,p| + |B,p|) + \frac{1}{2}(|B,p| + |C,p|) + \frac{1}{2}(|C,p| + |A,p|) = |A,p| + |B,p| + |C,p|\,.$$

---

4 Zadanie:

Nech má trojuholník strany dĺžok a, b, c a ich protiľahlé uhly veľkostí postupne α, β, γ. Dokážte, že platí

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma > 0.$$

Zdroj: MO, 28. ročník, A-I-6

Riešenie 1:

Rozoberme prípady:

- Nech trojuholník nie je tupouhlý.
  Potom sú aspoň dve hodnoty $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kladné a tretia je nezáporná, takže
  $$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma > 0.$$
- Nech trojuholník je tupouhlý.
  Bez ujmy na všeobecnosti je tupý uhol γ. Keďže funkcia kosínus je na intervale $(0°, 90°)$ klesajúca a kladná, využitím trojuholníkovej nerovnosti dostávame
  $$\begin{gathered} a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \\ \geq a\cos(\alpha+\beta) + b\cos(\alpha+\beta) + c\cos\gamma \\ = (a+b)\cos(\alpha+\beta) + c\cos\gamma \\ = (a+b)\cos(180° - \gamma) - c\cos(180° - \gamma) \\ = (a+b-c)\cos(180° - \gamma) \\ > 0. \end{gathered}$$

Riešenie 2:

Najprv dokážeme pomocné tvrdenia:

- $$\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin x\cos x + \sin y\cos y.$$
  - Platí
  $$\begin{gathered} \sin(x+y)\cos(x-y) \\ = (\sin x\cos y + \sin y\cos x)(\cos x\cos y + \sin y\sin x) \\ = \sin x\cos y\cos x\cos y + \sin x\cos y\sin y\sin x + \sin y\cos x\cos x\cos y + \sin y\cos x\sin y\sin x \\ = \sin x\cos x(\cos y)^2 + \sin y\cos y(\sin x)^2 + \sin y\cos y(\cos x)^2 + \sin x\cos x(\sin y)^2 \\ = \sin x\cos x\left((\cos y)^2 + (\sin y)^2\right) + \sin y\cos y\left((\cos x)^2 + (\sin x)^2\right). \\ = \sin x\cos x \cdot 1 + \sin y\cos y \cdot 1 \\ = \sin x\cos x + \sin y\cos y. \end{gathered}$$
- $$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\sin y.$$
  - Platí
  $$\begin{gathered} \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ = (\cos x\cos y + \sin x\sin y) - (\cos x\cos y - \sin x\sin y) \\ = 2\sin x\sin y. \end{gathered}$$

Označme r polomer kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Potom platí $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$, a teda využitím pomocných tvrdení

$$
\begin{aligned}
&a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma\\
&= 2r\sin\alpha\cos\alpha + 2r\sin\beta\cos\beta + 2r\sin\gamma\cos\gamma\\
&= 2r\,(\sin\alpha\cos\alpha + (\sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma))\\
&= 2r\,((\sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma) + \sin\alpha\cos\alpha)\\
&= 2r\,(\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) + \sin\alpha\cos\alpha)\\
&= 2r\,(\sin(180^\circ-\alpha)\cos(\beta-\gamma) - \sin\alpha\cos(180^\circ-\alpha))\\
&= 2r\,(\sin\alpha\cos(\beta-\gamma) - \sin\alpha\cos(\beta+\gamma))\\
&= 2r\sin\alpha\,(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma))\\
&= 2r\,(\sin\gamma\cos(\alpha-\beta) - \sin\gamma\cos(\alpha+\beta))\\
&= 2r\sin\gamma\,(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))\\
&= 2r\sin\alpha\cdot 2\sin\beta\sin\gamma\\
&= 4r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > 0.
\end{aligned}
$$

Riešenie 3:

Podľa kosínusovej vety je

$$
\begin{aligned}
2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2.\\
2ca\cos\beta &= c^2 + a^2 - b^2,\\
2ab\cos\gamma &= a^2 + b^2 - c^2,
\end{aligned}
$$

Z toho

$$a^2\cdot 2bc\cos\alpha + b^2\cdot 2ca\cos\beta + c^2\cdot 2ab\cos\gamma = a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) + b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) + c^2\left(a^2+b^2-c^2\right),$$

$$abc(a\cos\alpha + +b\cos\beta + c\cos\gamma) = \left(a^2b^2 + c^2a^2 - a^4\right) + \left(b^2c^2 + a^2b^2 - b^4\right) + \left(c^2a^2 + b^2c^2 - c^4\right),$$

z čoho

$$
\begin{aligned}
&abc(a\cos\alpha + +b\cos\beta + c\cos\gamma)\\
&= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2 + a^2 - a^4 - b^4 - c^4\\
&= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2)\\
&= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\\
&= 4a^2b^2 - (2ac\cos\gamma)^2\\
&= 4a^2b^2 - 4a^2c^2(\cos\gamma)^2\\
&= 4a^2b^2\left(1 - (\cos\gamma)^2\right)\\
&= 4a^2b^2(\sin\gamma)^2\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Z toho už dostávame

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma > 0.$$